Operaciones lineales en $\mathbb{F}^n$, donde $\mathbb{F}$ es un campo (ejercicios)

Objetivos. Conocer con un par de ejemplos cómo se llevan a cabo las operaciones lineales en $\mathbb{C}^3$ y en $\mathbb{F}_2^5$.

Requisitos. El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, el campo $\mathbb{F}_2$ de dos elementos.

Suma y producto de dos números complejos (repaso)

1. Recuerde cómo sumar y multiplicar números complejos:

$$(2+3\,\mathrm{i}) + (7-5\,\mathrm{i}) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

$$(2+3\,\mathrm{i})(7-5\,\mathrm{i}) = \big(14+15\big) + \big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\big)\,\mathrm{i} = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}.$$

2. Calcule los siguientes productos de números complejos:

$$(3+2\,\mathrm{i})(3-5\,\mathrm{i}) =$$

$$(3+2\,\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) =$$

$$(3+2\,\mathrm{i})(4+7\,\mathrm{i}) =$$

Operaciones lineales en $\mathbb{C}^3$

3. Las operaciones lineales en $\mathbb{C}^3$ se definen por componentes, como en $\mathbb{R}^3$, pero ahora hay que sumar y multiplicar números complejos:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \\ \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo: operaciones lineales en $\mathbb{C}^3$

Consideremos los siguientes datos numéricos:

$$a = \begin{bmatrix} 3 - 5\,\mathrm{i} \\ 2 + \mathrm{i} \\ 4 + 7\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 + 3\,\mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} \\ 5 - 4\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 3 + 2\,\mathrm{i}\,.$$

4. Calcule la suma $a + b$:

$$a + b = \begin{bmatrix} \\ (2 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2\,\mathrm{i} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

5. Calcule el producto λa (puede usar los resultados del Ejercicio 2):

$$\lambda a = \begin{bmatrix} (3 + 2\,\mathrm{i})(3 - 5\,\mathrm{i}) \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

El campo de dos elementos

6. En cualquier campo $\mathbb{F}$ debe existir un único elemento neutro aditivo (por lo común lo denotan por 0 y llaman *zero*) y un elemento neutro multiplicativo (por lo común lo denotan por 1 y llaman *uno*). Consideremos el campo más pequeño posible que sólo tiene estos dos elementos. La operaciones se definen de la siguiente manera:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

El conjunto $\{0, 1\}$ con estas dos operaciones se denota por $\mathbb{F}_2$.

7. Haga las operaciones en $\mathbb{F}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$