Isometrías lineales

Objetivos. Demostrar el criterio de isometrías lineales.

Requisitos. Transformación adjunta, desigualdad de Schwarz, norma asociada con un producto interno, distancia asociada con una norma.

1. Teorema. Sean V, W espacios vectoriales con producto interno. Denotemos por $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ a las normas asociadas con los productos internos y denotemos por d_V y d_W a las distancias asociadas con estas normas.

Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Supongamos que existe T^* (por ejemplo, esta condición se cumple si V y W son espacios de dimensiones finitas). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es *isometría*, esto es, T preserva distancias entre puntos:

$$d_W(Ta, Tb) = d_V(a, b) \qquad \forall a, b \in V.$$

(b) T preserva la norma:

$$\|Ta\|_W = \|a\|_V \qquad \forall a \in V.$$

(c) T preserva el producto interno:

$$\langle Ta, Tb \rangle_W = \langle a, b \rangle_V \qquad \forall a, b \in V.$$

(d) $T^* T = I_V$.

2. Ejercicio. Demuestre el teorema.

3. Observación. Toda isometría lineal es inyectiva:

$$T(v) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \|T(v)\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \|v\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \mathbf{0}.$$

4. Proposición. Sean V, W espacios vectoriales con producto interno de la misma dimensión finita, $\dim(V) = \dim(W) < +\infty$. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ una isometría lineal. Entonces T es invertible, y

$$T^* T = I_V, \qquad T T^* = I_W.$$

Demostración. Sabemos que T es inyectiva. Por lo tanto, de la fórmula

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(V)$$

obtenemos que $\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(W)$, y T es sobreyectiva. Así que T es invertible. Ahora de la igualdad $T^* T = I_V$ podemos concluir que $T^* = T^{-1}$ y por consecuencia $T T^* = I_W$. $\square$

5. Observación. Existen isometrías isométricas de espacios con producto interno que no son sobreyectivas.

6. Ejemplo. Consideremos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con los productos internos canónicos ("productos-puntos"). Definamos la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mediante la regla:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\ker(T)$, $\operatorname{im}(T)$, T^* y los productos T^*T, TT^*.

7. Tarea adicional (operador de desplazamiento en el espacio de suseciones finitas). Denotemos por $\mathcal{F}$ al espacio vectorial de las sucesiones $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ que se anulan apartir de algún índice:

$$x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists K \in \{1, 2, \ldots\} \quad \forall k \geq K \quad x_k = 0.$$

Definamos en $\mathcal{F}$ el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k \qquad (x, y \in \mathcal{F}).$$

Como $x, y \in \mathcal{F}$, en realidad la suma es finita. Definamos la transformación $S\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mediante la siguiente regla:

$$(Sx)_k = \begin{cases} x_{k-1}, & k \geq 2; \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

Halle S^* y calcule los productos S^*S y SS^*. Muestre que S no es sobreyectiva.