Representación de funcionales lineales en espacios euclidianos y unitarios

Objetivos. Demostrar que todo funcional lineal φ en un espacio euclidiano $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se puede representar como $\varphi(v) = \langle u, v\rangle$, donde u es un vector del espacio V. Demostrar que la correspondencia entre u y φ es biyectiva y lineal conjugada.

1. Proposición. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $u \in V$. Entonces el siguiente funcional $\varphi\colon V \to \mathbb{C}$ es lineal:

$$\varphi(v) \coloneqq \langle u, v\rangle \qquad \forall v \in V.$$

2. Ejercicio. Demuestre la proposición.

3. Ejemplo. Consideremos una función $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(x) \coloneqq (5 + \mathrm{i})x_1 + 7x_2 + 3\,\mathrm{i}\,x_3.$$

Es fácil ver

$$\varphi(x) = \langle u, x\rangle,$$

donde

$$u = \begin{bmatrix} 5 - \mathrm{i}) \\ 7 \\ -3\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

4. Teorema de Riesz–Fréchet de representación de funcionales lineales en espacios con producto inteno, el caso de dimensión finita. Sea V un espacio vectorial complejo o real de dimensión finita n con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sea $\varphi \in V^*$. Entonces existe un único vector $u \in V$ tal que

$$\varphi(v) = \langle u, v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{1}$$

Demostración. Idea clave: buscar coordenadas de u en una base ortonormal.

Consideremos sólo el caso complejo. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ortonormal de V.

Unicidad de u. Sea u un vector que satisface (1). Escribamos u como una combinación lineal de los elementos de la base $b_1, \ldots, b_n$:

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k.$$

Sustituyendo en (1) obtenemos que

$$\varphi(v) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}\langle b_k, v\rangle.$$

Para un $j \in \{1, \ldots, n\}$ arbitrario ponemos $v = b_j$ en la igualdad (1):

$$\varphi(b_j) = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k, b_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \delta_{j,k} = \overline{\lambda_j}.$$

De allí $\lambda_j = \overline{\varphi(b_j)}$, así que u se expresa a través de φ y $b_1, \ldots, b_n$ de manera única:

$$u = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(b_j)} b_j.$$

Existencia de u. Definamos u mediante la fórmula

$$u = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(b_j)} b_j$$

y demostremos que u satisface (1). Para cualquier vector $v = \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(b_j)} b_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_k \varphi(b_j) \langle b_j, b_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi(b_k) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k \right) = \varphi(v). \end{aligned}$$

□

5. Ejemplo en $\mathbb{R}^4$. El funcional lineal $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definido mediante

$$\varphi(x) = 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4$$

se puede escribir en forma

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle = x^\top y \qquad \forall x \in \mathbb{R}^4,$$

si ponemos

$$y = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Ejemplo en $\mathbb{C}^3$. El funcional lineal $\varphi \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definido mediante

$$\varphi(x) = (4 - 5\,\mathrm{i})x_1 + \mathrm{i}\,x_2 + (7 + 2\,\mathrm{i})x_3$$

se puede escribir como

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle = y^* x \qquad \forall x \in \mathbb{C}^3,$$

donde $y^* = \overline{y}^\top$,

$$y = \begin{bmatrix} 4 + 5\,\mathrm{i} \\ -\,\mathrm{i} \\ 7 - 2\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

7. Proposición (biyección canónica de un espacio unitario sobre su espacio dual). Se V un espacio vectorial complejo de dimensión finita n con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces la aplicación $\Psi \colon V \to V^*$ definida mediante

$$\Psi(u)(v) = \langle u, v \rangle \qquad \forall u, v \in V$$

es biyectiva y conjugada lineal:

$$\Psi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \overline{\lambda_1}\Psi(u_1) + \overline{\lambda_2}\Psi(u_2).$$

8. Ejercicio. Demuestre la proposición. Sugerencia: para demostrar que la aplicación Ψ es inyectiva, aplique el funcional $\Psi(u_1 - u_2)$ al vector $v = u_1 - u_2$.