Funcionales lineales

Objetivos. Definir el concepto de funcionales lineales y conocer algunos ejemplos.

Requisitos. Espacios vectoriales, transformaciones lineales.

1. Definición (funcional lineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Un *funcional lineal* en V es una transformación lineal $V \to \mathbb{F}$.

2. Otra definición (equivalente a la primera). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Una función $\varphi\colon V \to \mathbb{F}$ se llama *funcional lineal* si es lineal, es decir, si es aditiva y homogénea.

3. Ejemplo de un funcional lineal en $\mathbb{R}^4$. Demostremos que la función $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente fórmula es lineal:

$$\varphi(x) = \sqrt{3}x_1 - 5x_2 + x_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}^4).$$

Solución.

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \sqrt{3}(x+y)_1 - 5(x+y)_2 + (x+y)_4 \\ &= \sqrt{3}(x_1+y_1) - 5(x_2+y_2) + (x_4+y_4) \\ &= \big(\sqrt{3}x_1 - 5x_2 + x_4\big) + \big(\sqrt{3}y_1 - 5y_2 + y_4\big) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x) &= \sqrt{3}(\lambda x)_1 - 5(\lambda x)_2 + (\lambda x)_4 \\ &= \sqrt{3}(\lambda x_1) - 5(\lambda x_2) + \lambda x_4 \\ &= \lambda\big(\sqrt{3}x_1 - 5x_2 + x_4\big) \\ &= \lambda\varphi(x). \end{aligned}$$

Aquí usamos las definiciones de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^4$ y las propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$. $\square$

4. Ejercicio (producto-punto en $\mathbb{R}^n$). Sea $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y sea $a \in \mathbb{R}^n$. Se considera el funcional $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x) \coloneqq a^\top x.$$

Demuestre que φ es lineal.

5. Ejemplo de una función que no es lineal. Demostremos que la función $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla no es lineal:

$$\varphi(x) = 5x_1 - 7x_1x_2.$$

Solución. Es suficiente mostrar con algún ejemplo que no se cumple cualquiera de las dos propiedades: la aditiva o la homogénea. En este ejemplo no se cumple ninguna de estas.

1. Mostremos que no se cumple la propiedad adivita. Sean

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$x + y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(x+y) = 5 \cdot 2 - 7 \cdot 2 \cdot 3 = 10 - 42 = -32.$$

Por otro lado,

$$\varphi(x) = -2, \qquad \varphi(y) = -9, \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = -11.$$

2. Tampoco se cumple la propiedad homogénea. Sean

$$\lambda = 10, \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\lambda x = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(\lambda x) = 5 \cdot 10 - 7 \cdot 10 \cdot 10 = -650.$$

Por otro lado,

$$\varphi(x) = -2, \qquad \lambda\varphi(x) = -20.$$ □

6. Ejemplo (traza de matrices). El funcional $\operatorname{tr}\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ se define mediante la siguiente regla:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{j,j}.$$

Es fácil ver que la traza cumple con las propiedades aditiva y homogénea:

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B), \qquad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

7. Ejemplo (funcional de evaluación de funciones continuas). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Recordamos que por $C([a, b], \mathbb{C})$ se denota el espacio vectorial de las funciones continuas $[a, b] \to \mathbb{C}$ provisto con operaciones lineales definidas punto a punto.

Sea $c \in [a, b]$ un punto fijo. El funcional definido por la siguiente regla se denomina *funcional de evaluación en el punto* c:

$$\operatorname{eval}_c \colon C([a, b], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \qquad \operatorname{eval}_c(f) \coloneqq f(c).$$

8. Ejemplo (funcional de evaluación de polinomios en un punto). Sea $c \in \mathbb{C}$ un punto fijo. En el espacio $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ definimos el *funcional de evaluación en el punto* c:

$$\operatorname{eval}_c(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n) \coloneqq \alpha_0 + \alpha_1 c + \ldots + \alpha_n c^n$$

Por supuesto la expresión $\alpha_0 + \alpha_1 c + \ldots + \alpha_n c^n$ se denota por $f(c)$. Así que

$$\operatorname{eval}_c(f) = f(c) \qquad \forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{C}).$$

9. Ejemplo. Demostremos que el siguiente funcional $\varphi \colon \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ es lineal:

$$\varphi(f) \coloneqq 5f(-7) + 8f''(2).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} (f+g)(p) &= f(p) + g(p), & \qquad (\lambda f)(p) &= \lambda f(p), \\ (f+g)''(x) &= f''(x) + f''(x), & \qquad (\lambda f)''(x) &= \lambda f''(x). \end{aligned}$$

De aquí sigue que para todo punto $p \in \mathbb{C}$

$$(f+g)''(p) = f''(p) + g''(p), \qquad (\lambda f)''(p) = \lambda f''(p).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi(f+g) &= 5(f+g)(-7) + 8(f+g)''(2) = 5(f(-7) + g(-7)) + 8(f''(2) + g''(2)) \\ &= \big(5f(-7) + 8f''(2)\big) + \big(5g(-7) + 8g''(2)\big) = \varphi(f) + \varphi(g); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f) &= 5(\lambda f)(-7) + 8(\lambda f)''(2) = 5\lambda f(-7) + 8\lambda f''(2) \\ &= \lambda\big(5f(-7) + 8f''(2)\big) = \lambda \varphi(f). \end{aligned}$$

10. Ejemplo (integral de funciones continuas sobre un intervalo). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Consideremos el funcional $\varphi \colon C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(f) \coloneqq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se demuestra en el curso de cálculo que

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Estas igualdades significan que φ es lineal.