Primer conocimiento de las combinaciones lineales y dependencias lineales

Ejercicios

Objetivos. Conocer ejemplos de combinaciones lineales, vectores linealmente dependientes y linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Requisitos. Operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$.

Combinaciones lineales

1. Ejemplo. Consideramos tres vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule su *combinación lineal* $3a_1 - 2a_2 + a_3$:

$$3a_1 - 2a_2 + a_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix}.$$

II. Calcule otra combinación lineal $0a_1 + \dfrac{1}{3}a_2 + \sqrt{7}a_3$ de los mismos vectores:

$$0a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \sqrt{7}a_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix}.$$

III. Y otra más:

$$a_1 - 5a_2 + 2a_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Comparando los resultados de los incisos I y III observamos una situación interesante:

dos combinaciones lineales son $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$, aunque sus coeficientes son $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

2. Consideramos tres vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Muestre que el vector c es una combinación lineal de los vectores a y b (adivine los coeficientes):

$$\underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

esto es,

$$\underbrace{\qquad}_{?} a + \underbrace{\qquad}_{?} b = c.$$

3. Consideramos tres vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que el vector c **no es** combinación lineal de los vectores a y b. En otras palabras, hay que mostrar que para cualesquiera coeficientes reales λ y μ el vector $\lambda a + \mu b$ no es igual al vector c.

Este ejercicio es muy simple, no es necesario calcular o escribir mucho. Hay que observar bien los vectores a, b y c y encontrar una razón por la cual ninguna de las combinaciones lineales de a y b puede ser igual al vector c.

Dependencia lineal

4. Consideremos los siguientes tres vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $2a_1 - 2a_2 + 3a_3 = \mathbf{0}_3$:

$$2\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

En esta situación se dice que a_1, a_2, a_3 son *linealmente dependientes*.

5. Consideremos los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son *linealmente dependientes*, es decir, encuentre algunos números reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ no todos iguales a cero y tales que $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \mathbf{0}_3$. En este ejercicio los números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se pueden adivinar fácilmente.

$$\underbrace{\qquad}_{?}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \underbrace{\qquad}_{?}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dependencia lineal y combinaciones lineales

Hay varias relaciones entre los conceptos de *combinación lineal* y *dependencia lineal*. En los siguientes ejercicios los vectores no están dados explícitamente. Hay que usar las hipótesis y *deducir* lo que se pide.

6. Sean a, b dos vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$b = 7a.$$

Demuestre que a y b son linealmente dependientes, es decir, encuentre algunos coeficientes λ_1 y λ_2 no todos iguales a cero y tales que

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = \mathbf{0}_n.$$

7. Sean a y b algunos vectores en $\mathbb{R}^n$. Denotemos por c la combinación lineal de a y b con coeficientes 4 y -5, respectivamente:

$$c = 4a - 5b.$$

Demuestre que los vectores a, b, c son linealmente dependientes:

$$\underbrace{\qquad}_{?}\ a + \underbrace{\qquad}_{?}\ b + \underbrace{\qquad}_{?}\ c = \mathbf{0}_n.$$

8. Sean a, b, c algunos vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$5a + 2b - 8c = \mathbf{0}_n.$$

Demuestre que b es una combinación lineal de a y c.