Primer conocimiento de las combinaciones lineales y dependencias lineales

Objetivos. Conocer ejemplos de combinaciones lineales, vectores linealmente dependientes y linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Requisitos. Operaciones lineales en $\mathbb{R}^n$.

Combinaciones lineales

1. Definición (combinación lineal). Sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Entonces cualquier expresión de la forma

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, se llama combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_m$.

2. Ejemplo. Sean a_1 y a_2 los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Calcular la combinación lineal $2a_1 - 5a_2$.

3. Sean a_1, a_2, b los siguientes vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Muestre que b es una combinación lineal de a_1 y a_2.

Vectores linealmente dependientes y linealmente independientes

4. Definición (vectores linealmente dependientes). Sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Los vectores $a_1, \ldots, a_m$ se llaman *linealmente dependientes* si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}_n.$$

5. Muestre que los siguientes vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

6. Muestre que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$