Propiedades de la dependencia lineal

Objetivos. Estudiar propiedades de la dependencia lineal.

Requisitos. Definiciones, ejemplos y criterio de listas de vectores linealmente dependientes y linealmente independientes.

1. La propiedad de ser linealmente dependiente no depende del órden de los elementos de la lista. Si una lista de vectores $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente dependiente y $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ es una lista de los números $\{1, \ldots, m\}$ escritos en otro órden, entonces el sistema $(a_{\varphi_1}, \ldots, a_{\varphi_m})$ también es linealmente dependiente.

Por ejemplo, si

$$7a_1 + 0a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 0a_5 = \mathbf{0},$$

entonces también

$$4a_3 + 0a_5 + 7a_1 + 0a_2 + 2a_4 = \mathbf{0},$$

lo que muestra que la lista de vectores $(a_3, a_5, a_1, a_2, a_4)$ es linealmente dependiente.

2. Proposición (si una lista de vectores contiene al vector cero, entonces es linealmente dependiente). Formalmente, si $a_1, \ldots, a_m \in V$ y existe un índice $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $a_k = \mathbf{0}$, entonces $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente dependientes.

Demostración. Definimos los coeficientes λ_j de la siguiente manera:

$$\lambda_j \coloneqq \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Entonces la combinación lineal correspondiente es cero:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = \lambda_k \underbrace{a_k}_{\substack{\parallel \\ \mathbf{0}}} + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne k}} \underbrace{\lambda_j}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_j = \mathbf{0},$$

y no todos los coeficientes son cero (a saber: $a_k = 1$). $\square$

3. Corolario. Todos los elementos de un sistema linealmente independiente son no nulos.

Demostración. Es la forma contrapositiva de la proposición anterior. $\square$

4. Proposición (si una lista de vectores contiene dos vectores iguales, entonces es linealmente dependiente). Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ tales que existen $p, q \in \{1, \ldots, m\}$ con $p \neq q$ y $a_p = a_q$. Entonces la lista $a_1, \ldots, a_m$ es linealmente dependiente.

Demostración. Definimos los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de la siguiente manera:

$$\lambda_j := \begin{cases} 1, & \text{si } j = p; \\ -1, & \text{si } j = q; \\ 0, & \text{si } j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

Entonces no todos los coeficientes son cero, pero la combinación lineal es cero:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = a_p - a_q + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ j \neq p,\ j \neq q}} 0 a_j = \mathbf{0}. \qquad \square$$

5. Corolario. Todos los elementos de un sistema linealmente independiente son diferentes entre sí.

6. La lista de un vector es linealmente dependiente si y sólo si el vector es cero. Sea $v \in V$ y sea $\mathcal{A} = (v)$ la lista que consiste en un sólo vector v. Entonces $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente si y sólo si $v = \mathbf{0}$.

Demostración. Necesidad. Supongamos que $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente. Esto significa que existe un coeficiente $\lambda_1 \neq 0$ tal que $\lambda_1 v = \mathbf{0}$. Multiplicando la igualdada por $\frac{1}{\lambda_1}$ concluimos que $v = \mathbf{0}$.

Suficiencia. Supongamos que $v = \mathbf{0}$. Entonces $1v = 1\mathbf{0} = \mathbf{0}$, así logramos a encontrar una combinación nula y no trivial. $\square$

7. Proposición. La lista vacía es linealmente independiente.

Demostración. Si fuera linealmente dependiente, entonces existiría una combinación lineal no trivial y nula. Pero de la lista vacía se puede formar sólo una combinación lineal, la cual no tiene ningún coeficiente y por lo tanto es trivial. $\square$

8. Teorema: si una sublista de una lista de vectores es linealmente dependiente, entonces la lista completa es linealmente dependiente. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sean $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, m\}$ algunos índices diferentes. Supongamos que la lista de vectores $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}$ es linealmente dependiente. Entonces $a_1, \ldots, a_m$ es linealmente dependiente.

Demostración simplificada. Como la propiedad de ser linealmente dependiente no depende del orden de elementos de la lista, podemos suponer que $i_1 = 1, \ldots, i_p = p$, así que los primeros p vectores son linealmente dependientes. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ algunos coeficientes no todos cero tales que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Pongamos $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_m = 0$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j}_{\mathbf{0}} + \sum_{p+1}^{m} \underbrace{\lambda_j}_{\substack{\| \\ 0}} a_j = \mathbf{0}.$$

Esta combinación lineal es no trivial, porque hay coeficientes no nulos entre los primeros coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. □

Demostración más formal. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ algunos coeficientes no todos cero tales que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{i_k} = \mathbf{0}.$$

Definimos los coeficientes $\mu_1, \ldots, \mu_m$ de la siguiente manera:

$$\mu_j := \begin{cases} \lambda_k, & \text{si } j = i_k,\ k \in \{1, \ldots, p\}; \\ 0, & \text{si } j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}. \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j = \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ j \in \{i_1, \ldots, i_p\}}} \mu_j a_j + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}}} \mu_j a_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{i_k} + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}}} 0 a_j = \mathbf{0}.$$

Existe un $k \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\lambda_k \neq 0$, por lo tanto $\mu_{i_k} \neq 0$, así que no todos $\mu_1, \ldots, \mu_m$ son cero. □

9. Corolario. Si una lista de vectores es linealmente independiente, entonces toda su sublista también es linealmente independiente.

10. Proposición (si una lista es linealmente independiente y se hace linealmente dependiente al agregar un vector nuevo, entonces este vector agregado es una combinación lineal de los vectores originales). Sean $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1} \in V$ tales que $(a_k)_{k=1}^m$ es linealmente independiente y $(a_k)_{k=1}^{m+1}$ es linealmente dependiente. Entonces $a_{m+1} \in \ell\big((a_k)_{k=1}^m\big)$.

Demostración. Por la hipótesis, existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ no todos cero tales que

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m + \lambda_{m+1} a_{m+1} = \mathbf{0}.$$

El último coeficiente no puede ser cero, porque en este caso los vectores $a_1, \ldots, a_m$ fueran linealmente dependientes. Por lo tanto $\lambda_{m+1} \neq 0$ y podemos despejar el vector a_{m+1}:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_{m+1}} \right) a_j. \qquad \square$$