Teorema fundamental de la dependencia lineal

Objetivos. Demostrar el *teorema fundamental de la dependencia lineal*. Mencionar su otra forma lógica que se llama *teorema fundamental de la independencia lineal*.

Requisitos. Vectores linealmente dependientes y sus propiedades, subespacios generado por un conjunto de vectores, sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.

1. Teorema fundamental de la dependencia lineal. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sean $b_1, \ldots, b_n \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$, donde $n > m$. Entonces $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente dependientes.

También podemos escribir el teorema en forma contrapositiva:

2. Corolario (Teorema fundamental de la independencia lineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sean $b_1, \ldots, b_n \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$. Si $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente independientes, entonces $m \geq n$.

3. Ejemplo. Antes de dar la demostración general expliquemos la idea con un ejemplo. Sea V un espacio vectorial real, sean $a_1, a_2 \in V$ y sean b_1, b_2, b_3 las siguientes combinaciones lineales de a_1, a_2:

$$b_1 = 3a_1 + 5a_2, \qquad b_2 = -a_1 + 2a_2, \qquad b_3 = 4a_1 - 6a_2. \tag{1}$$

En este ejemplo los dos vectores a_1, a_2 generan a los tres vectores b_1, b_2, b_3 ($m = 2$, $n = 3$). Vamos a demostrar que b_1, b_2, b_3 son linealmente dependientes, esto es, vamos a encontrar coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, no todos iguales a cero y tales que

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \mathbf{0}.$$

Aplicamos (1):

$$\lambda_1(3a_1 + 5a_2) + \lambda_2(-a_1 + 2a_2) + \lambda_3(5a_1 - 6a_2) = \mathbf{0}.$$

Regrupamos los sumandos:

$$(3\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3)a_1 + (5\lambda_1 + 2\lambda_2 - 6\lambda_3)a_2 = \mathbf{0}.$$

No sabemos nada de los vectores a_1 y a_2. Por eso la única manera de garantizar la igualdad es anular los coeficientes antes de a_1 y a_2 (principio de Machiavelli: si no puedes confiar en alguien, ¡mátalo!). En otras palabras, vamos a buscar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ como una solución no trivial del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0; \\ 5\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

El número de las incógnitas ($n = 3$) es mayor que el número de las ecuaciones ($m = 2$). De aquí ya podemos concluir que el sistema tiene soluciones no triviales, por lo tanto los vectores b_1, b_2, b_3 son linealmente dependientes. Resolvamos el sistema:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 *= -1} \left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 += -2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & -4 & 0 \\ 11 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_2 *= \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & -4 & 0 \\ 11/2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 += 4R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 19 & 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Solución general:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -19\lambda_1 \\ -11\lambda_1/2 \end{bmatrix}.$$

Solución particular (con $\lambda_1 = 2$):

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -38, \qquad \lambda_3 = -11.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2b_1 - 38b_2 - 11b_3 &= 2(3a_1 + 5a_2) - 38(-a_1 + 2a_2) - 11(4a_1 - 6a_2) \\ &= (6 + 38 - 44)a_1 + (10 - 76 + 66)a_2 = 0a_1 + 0a_2 = \mathbf{0}. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

4. Ejercicio. Sea V un EV/$\mathbb{R}$, sean $a_1, a_2 \in V$ y sean

$$b_1 = 3a_1 - 4a_2, \qquad b_2 = 5a_1 + 3a_2, \qquad b_3 = 2a_1 + a_2, \qquad b_4 = 4a_1 + 3a_2.$$

Muestre de manera explícita que los vectores b_1, b_2, b_3, b_4 son linealemente dependientes, esto es, encuentre coeficientes reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ no todos iguales a cero tales que

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = \mathbf{0}.$$

Primera demostración del teorema
(a través de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas)

Demostración. Por la hipótesis del teorema, los vectores $b_1, \ldots, b_n$ son combinaciones lineales de los vectores $a_1, \ldots, a_m$. Esto significa que existen algunos escalares $\gamma_{i,j} \in \mathbb{F}$ tales que

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{i,j} a_i. \tag{2}$$

Denotemos por A a la matriz $\left[\gamma_{i,j}\right]_{i,j=1}^{m,n}$. Queremos demostrar que existen algunos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ no todos iguales a 0 tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Sustituyendo v_j por las expresiones (2) y usando las propiedades de operaciones lineales en V podemos escribir (3) de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} \lambda_j \right) u_i = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Para garantizar la igualdad (4) basta pedir que

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} \lambda_j = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\},$$

esto es, que la tupla

$$x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

sea solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$Ax = \mathbf{0}_m.$$

Pero en este sistema el número de ecuaciones es estrictamente menor que el número de incógnitas: $m < n$. Por lo tanto, el sistema tiene una solución no nula. $\square$

Segunda demostración del teorema

Esta demostración es más teórica. Para simplificarla un poco, empezamos con un lema que sigue fácilmente de la propiedad transitiva de las dependencias lineales.

5. Lema (de la sustitución de un vector en una lista sin cambiar el subespacio generado). Sean $u_1, \ldots, u_p, v, w \in V$ tales que

$$v \in \ell(u_1, \ldots, u_p, w) \qquad \text{y} \qquad w \in \ell(u_1, \ldots, u_p, v).$$

Entonces

$$\ell(u_1, \ldots, u_p, w) = \ell(u_1, \ldots, u_p, v).$$

6. Notación para la concatenación de dos listas.. Si $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, entonces denotamos por $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ a la lista $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$. En vez de $\mathcal{A} \sqcup (b_1)$ escribimos simplemente $\mathcal{A} \sqcup b_1$.

Segunda demostración del teorema.
Primer paso. Denotemos la lista de vectores $a_1, \ldots, a_m$ por $\mathcal{A}_0$. Agregamos el vector b_1, es decir, consideramos la lista $\mathcal{A}_0 \sqcup b_1$. La última es linealmente dependiente porque el vector b_1 es una combinación lineal de los anteriores. Por lo tanto alguno de los elementos de $\mathcal{A}_0 \sqcup b_1$ es una combinación lineal de los posteriores. Si el vector b_1 es una combinación de los posteriores, entonces $b_1 = \mathbf{0}$ y los vectores $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente dependientes.

En otro caso, existe un $p_1 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $a_{p_1} \in \ell(a_{p_1+1}, \ldots, a_m, b_1)$. Denotemos por $\mathcal{A}_1$ a la lista de vectores que se obtiene de $\mathcal{A}_0$ al excluir el vector con el índice p_1:

$$\mathcal{A}_1 \coloneqq \big(a_i\big)_{i \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{p_1\}}.$$

Como $a_{p_1} \in \ell(\mathcal{A}_1 \sqcup b_1)$ y $b_1 \in \ell(\mathcal{A}_0)$, por el lema de la sustitución obtenemos que

$$\ell(\mathcal{A}_1 \sqcup b_1) = \ell(\mathcal{A}_0).$$

Segundo paso. Notamos que la lista $\mathcal{A}_1 \sqcup (b_1, b_2)$ son linealmente dependientes porque $b_2 \in \ell(\mathcal{A}_1 \sqcup b_1)$. Por lo tanto uno de los elementos de $\mathcal{A}_1 \sqcup (b_1, b_2)$ es una combinación lineal de los posteriores. Si b_1 o b_2 es una combinación lineal de los posteriores, entonces los vectores $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente dependientes.

En otro caso existe un índice $p_2 \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{p_1\}$ tal que $a_{p_2} \in \ell(\mathcal{A}_2 \sqcup (b_1, b_2))$, donde

$$\mathcal{A}_2 \coloneqq \big(a_i\big)_{i \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{p_1, p_2\}}.$$

Como $a_{p_2} \in \ell(\mathcal{A}_2 \sqcup (b_1, b_2))$ y $b_2 \in \ell(\mathcal{A}_1 \sqcup b_1)$,

$$\ell(\mathcal{A}_2 \sqcup (b_1, b_2)) = \ell(\mathcal{A}_1 \sqcup b_1) = \ell(\mathcal{A}_0).$$

Siguiendo de la misma manera, después de m pasos excluimos a todos los vectores $a_1, \ldots, a_m$ y llegamos a la conclusión que

$$\ell(b_1, \ldots, b_m) = \ell(\mathcal{A}_0).$$

Esto implica que $b_{m+1} \in \ell(b_1, \ldots, b_m)$ y por lo tanto $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente dependientes. $\square$