Dependencia lineal

Objetivos. Conocer las definiciones y ejemplos de listas de vectores linealmente dependientes y linealmente independientes,

Requisitos. Combinación lineal, sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

Listas de vectores linealmente dependientes: definición y ejemplos

1. Combinación lineal trivial, combinación trivial nula. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean $a_1, \ldots, a_m$ algunos vectores del espacio V. Una combinación lineal

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j$$

se llama:

- *trivial*, si todos los coeficientes son cero: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.
- *nula*, si $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = \mathbf{0}$.

Toda combinación lineal trivial es nula, pero para algunos vectores existen combinaciones lineales nulas no triviales.

2. Definición (lista linealmente dependiente). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores del espacio V. La lista $(a_k)_{k=1}^m$ se denomina *linealmente dependiente* si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ no todos iguales a cero y tales que $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}$. En otras palabras, si existe una combinación lineal nula y no trivial de estos vectores.

3. Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}^3$ la lista de vectores (a, b, c) donde

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

es linealmente dependiente, pues

$$2a - b + c = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Listas de vectores linealmente independientes: definición y ejemplos

La definición de vectores linealmente dependientes se puede escribir así:

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F} \qquad \big(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}\big) \quad \wedge \quad \big(\lambda_1 \neq 0 \quad \vee \quad \ldots \quad \vee \quad \lambda_m \neq 0\big).$$

Construyamos la negación de esta proposición:

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F} \qquad \big(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m \neq \mathbf{0}\big) \quad \vee \quad \big(\lambda_1 = 0 \quad \wedge \quad \ldots \quad \wedge \quad \lambda_m = 0\big).$$

Tomando en cuenta que la proposición $\overline{P} \wedge Q$ es equivalente a la proposición $P \to Q$ llegamos a la siguiente definición formal de vectores *linealmente independientes*:

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F} \qquad \big(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}\big) \quad \Rightarrow \quad \big(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0\big).$$

4. Definición (lista linealmente independiente). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y $(a_k)_{k=1}^m$ una lista de vectores en V. La lista $(a_k)_{k=1}^m$ se llama *linealmente independiente* si no es linealmente dependiente, esto es, si para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ la igualdad

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}$$

implica que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

La misma definición se puede decir con otras palabras de varias maneras. Los vectores $a_1, \ldots, a_m$ se llaman *linealmente independientes*:

- si la combinación lineal de estos vectores se anula solamente para todos los escalares iguales a cero;
- si la única combinación lineal nula de estos vectores es la trivial;
- si toda combinación lineal de estos vectores es diferente de cero, excepto la combinación lineal trivial.

5. Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}^3$ consideremos a la lista de vectores (a, b, c), donde

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Mostremos que esta lista de vectores es linealmente independiente. La igualdad

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \mathbf{0}$$

se puede escribir como el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{cases} -3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0; \\ & & 4\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0; \\ & & & & 5\lambda_3 & = & 0. \end{cases}$$

La matriz del sistema es escalonada y el número de renglones no nulos coincide con el número de las incógnitas (3). Por lo tanto las incógnitas se pueden determinar de manera única, empezando con la última ecuación:

$$\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = 0.$$

Esto significa que la lista de vectores (a, b, c) es linealmente independiente.

6. Ejercicio. Demuestre que los siguientes elementos de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Ejercicio. Demuestre que el sistema de polinomios $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ es linealmente independiente en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

8. Ejemplo. Dos elementos de $V^2(O)$ son linealmente dependientes $\Longleftrightarrow$ son colineales.

9. Ejemplo. Cualesquiera tres vectores del espacio $V^2(O)$ son linealmente dependientes.

10. Ejemplo. Tres elementos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ de $V^3(O)$ son linealmente dependientes $\Longleftrightarrow$ son complanares.

11. Ejercicio. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos dos elementos: $f(t) = e^t$ y $g(t) = e^{3t}$. El sistema (f, g) es linealmente independiente.

Algoritmo para determinar si una lista de vectores en $\mathbb{F}^n$ es linealmente dependiente o no

12. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. La lista de las columnas de A es linealmente dependiente $\Longleftrightarrow$ el sistema de ecuaciones lineales homogéneas $Ax = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.

13. Ejercicio. Determine si la siguiente lista de vectores en $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente o no:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

14. Ejercicio. Determine si la siguiente lista de vectores en $\mathbb{R}^4$ es linealmente dependiente o no:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

15. Ejercicio. Determine si la siguiente lista de vectores en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es linealmente dependiente o no:

$$f_1(x) = -x^2 + 2x + 3, \qquad f_2(x) = x^2 - x + 2, \qquad f_3(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$