Criterio de dependencia lineal

Objetivos. Estudiar un criterio de la dependencia lineal.

Requisitos. Definiciones y ejemplos de listas de vectores linealmente dependientes y linealmente independientes.

Para comprender mejor el enunciado del criterio y su demostración, empezamos con dos ejemplos.

1. Ejemplo: si algunos vectores son linealmente dependientes, entonces uno de estos es una combinación lineal de los demás. Supongamos que

$$0a_1 + 0a_2 + 7a_3 - 5a_4 + 0a_5 + 3a_6 + 0a_7 = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Entonces podemos despejar de (1) a cada uno de los vectores a_3, a_4, a_6 (los que tienen coeficientes no nulos en (1)). En particular, el vector a_6 se expresa como una combinación lineal de los vectores anteriores:

$$a_6 = 0a_1 + 0a_2 - \frac{7}{3}a_3 + \frac{5}{3}a_4 + 0a_5,$$

o como una combinación lineal de todos los demás vectores:

$$a_6 = 0a_1 + 0a_2 - \frac{7}{3}a_3 + \frac{5}{3}a_4 + 0a_5 + 0a_7,$$

y el vector a_3 se puede escribir como una combinación lineal de los vectores posteriores (y también como una combinación lineal de todos los demás vectores):

$$a_3 = \frac{5}{7}a_4 + 0a_5 - \frac{3}{7}a_6 + 0a_7 = 0a_1 + 0a_2 + \frac{5}{7}a_4 + 0a_5 - \frac{3}{7}a_6 + 0a_7.$$

2. Ejemplo: si uno de los vectores es una combinación de los demás, entonces juntos son linealmente dependientes. Supongamos que

$$a_2 = 5a_1 + 0a_3 - 2a_4 + 0a_5.$$

Entonces

$$-5a_1 + 1a_2 + 0a_3 + 2a_4 + 0a_5 = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Algunos de los coeficientes del lado izquierdo de (2) son distintos de cero (en particular, el coeficiente de a_2), por lo tanto los vectores son linealmente dependientes.

3. Teorema (criterio de dependencia lineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $(a_k)_{k=1}^m$ una lista de vectores del espacio V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(a_k)_{k=1}^m$ es linealmente dependiente;

(b) alguno de estos vectores es una combinación lineal de los demás:

$$\exists p \in \{1, \ldots, m\} \qquad \text{tal que} \qquad a_p \in \ell\Big((a_k)_{\substack{1 \le k \le m \\ k \ne p}}\Big) = \ell(a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+1}, \ldots, a_m);$$

(c) alguno de los vectores es una combinación lineal de los anteriores:

$$\exists p \in \{1, \ldots, m\} \qquad \text{tal que} \qquad a_p \in \ell\Big((a_k)_{1 \le k \le p-1}\Big) = \ell(a_1, \ldots, a_{p-1});$$

(d) alguno de los vectores es una combinación lineal de los posteriores:

$$\exists p \in \{1, \ldots, m\} \qquad \text{tal que} \qquad a_p \in \ell\Big((a_k)_{p+1 \le k \le m}\Big) = \ell(a_{p+1}, \ldots, a_m).$$

Demostración. Esquema de la demostración:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{(a)} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{(c)} \arrow[dr] & & \text{(d)} \arrow[dl] \\
 & \text{(b)} \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

(a)$\Rightarrow$(c). Suponemos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$, no todos λ_k son nulos, y

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Denotemos por p al *último índice* k tal que $\lambda_k \ne 0$:

$$p := \max\Big\{k \in \{1, \ldots, m\} \colon \quad a_k \ne 0\Big\}.$$

Por la hipótesis, entre los coeficientes a_k hay no nulos, y la definición de p es correcta. Como los coeficientes a_k con $k > p$ son nulos, podemos reescribir la igualdad (3) de la siguiente manera:

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{p-1} a_p + \underbrace{\lambda_p}_{\substack{\nparallel \\ 0}} a_p = \mathbf{0}.$$

De esta igualdad podemos despejar el vector a_p y escribirlo como una combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_{p-1}$:

$$a_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p} a_1 - \ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} a_{p-1}.$$

(c)$\Rightarrow$(b). Si a_p es una combinación lineal de los $a_1, \ldots, a_{p-1}$:

$$a_p = \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k a_k,$$

entonces a_p es una combinación lineal de los $a_1, \ldots, a_{p-1}, a_{p+1}, \ldots, a_m$:

$$a_p = \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k a_k + \sum_{k=p+1}^{m} 0 a_k.$$

(b)$\Rightarrow$(a). Sea el vector a_p una combinación lineal de los demás vectores:

$$a_p = \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ k \ne p}} \mu_k a_k.$$

Entonces

$$a_p + \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ k \ne p}} (-\mu_k) a_k = \mathbf{0}.$$

Definimos los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de la siguiente manera:

$$\lambda_k := \begin{cases} 1, & \text{si } k = p; \\ -\mu_k, & \text{si } k \ne p. \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = \mathbf{0}.$$

Aquí no todos los coeficientes λ_k son nulos: por ejemplo, $\lambda_p = 1$. $\square$

4. Ejercicio. Demuestre las implicaciones (a)$\Rightarrow$(d) y (d)$\Rightarrow$(b).

5. Ejemplo. Dos elementos de $V^2(O)$ son linealmente dependientes $\iff$ son colineales.

6. Ejemplo. Tres elementos de $V^2(O)$ siempre son linealmente dependientes.

7. Ejemplo. Tres elementos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ de $V^3(O)$ son linealmente dependientes $\iff$ son coplanares.

8. Tarea adicional: criterio de dependencia lineal de un conjunto de vectores. Un conjunto de vectores C en un espacio vectorial V es linealmente dependiente si, y sólo si, existe un vector $v \in C$ tal que $v \in \ell(C \setminus \{v\})$.