Construcción de bases en el núcleo e imagen de una transformación lineal

Objetivos. Estudiar el algoritmo para construir una base del núcleo y una base de la imagen de una transformación lineal.

Requisitos. Definición del núcleo y de la imagen y sus propiedades básicas, eliminación de Gauss, construcción de una sublista básica de una lista de vectores, solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

1. Ejercicio. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ una transformación lineal inyectiva y sean $v_1, \ldots, v_k$ algunos vectores linealmente independientes del espacio V. Demuestre que los vectores $T(v_1), \ldots, T(v_k)$ son linealmente independientes.

2. Proposición (la imagen de una transformación lineal está generada por las imágenes de los vectores que generan al dominio). Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, donde V es de dimensión finita. Sean $a_1, \ldots, a_n$ algunos vectores de V tales que

$$\ell(a_1, \ldots, a_n) = V.$$

Entonces

$$\operatorname{im}(T) = \ell(T(a_1), \ldots, T(a_n)).$$

Demostración. Demostremos que $\ell(T(a_1), \ldots, T(a_n)) \subset \operatorname{im}(T)$. De la defición de $\operatorname{im}(T)$ sigue que

$$T(a_1), \ldots, T(a_n) \in \operatorname{im}(T).$$

Como $\operatorname{im}(T)$ es un subespacio de W, toda combinación lineal de $T(a_1), \ldots, T(a_n)$ también pertenece a $\operatorname{im}(T)$, es decir, $\ell(T(a_1), \ldots, T(a_n)) \subset \operatorname{im}(T)$.

Demostremos que $\operatorname{im}(T) \subset \ell(T(a_1), \ldots, T(a_n))$. Sea $w \in \operatorname{im}(T)$. Entonces $w = T(v)$ para algún $v \in V$. Como $a_1, \ldots, a_n$ generan a V, existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k.$$

Aplicando T a ambos lados de esta igualdad obtenemos que

$$w = T(v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T(a_k) \in \ell(T(a_1), \ldots, T(a_n)).$$ $\square$

3. Corolario (construcción de una base de la imagen). Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, donde V es de dimensión finita. Sean $a_1, \ldots, a_n \in V$ tales que $\ell(a_1, \ldots, a_n) = V$ (en particular, $a_1, \ldots, a_n$ puede ser una base de V). Entonces:

1. Cualquier sublista básica de $(T(a_1), \ldots, T(a_n))$ es una base de $\operatorname{im}(T)$.
2. $\dim(\operatorname{im}(T)) = \operatorname{r}(T(a_1), \ldots, T(a_n))$.
3. $\dim(\operatorname{im}(T)) \leq \dim(V)$.

4. Definición (el rango de una transformación lineal). Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces el *rango* de T se define como la dimensión de la imagen de T:

$$\operatorname{r}(T) \coloneqq \dim(\operatorname{im}(T)).$$

5. Contrucción de una base de la imagen de una transformación lineal usando la matriz asociada. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, sea $\mathcal{A}$ una base de V y sea $\mathcal{B}$ una base de W. Supongamos que en la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ las columnas con índices $j_1, \ldots, j_r$ forman una sublista básica. Entonces los vectores $T(a_{j_1}), \ldots, T(a_{j_r})$ forman una base en $\operatorname{im}(T)$. En particular, $\operatorname{r}(T) = \operatorname{r}(T_{\mathcal{B},\mathcal{A}})$.

6. Construcción de una base del núcleo de una transformación lineal usando su matriz asociada. Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones finitas y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sean $\mathcal{A}$ una base de V y $\mathcal{B}$ una base de W. Denotemos a la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ por C. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$Cx = \mathbf{0}.$$

y denotemos por $(u_1, \ldots, u_s)$ a una base de su conjunto solución. Entonces los vectores de V que tienen vectores de coordenadas $u_1, \ldots, u_s$ forman una base de $\ker(T)$.

7. Ejemplo (construcción de bases del núcleo y de la imagen). Dada la matriz de transformación lineal $T\colon V \to W$ en bases $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, construir bases de su núcleo e imagen. Hacer las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primero transformemos la matriz dada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ en una matriz pseudoescalonada reducida usando operaciones elementales por filas:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 -= 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & 0 & -5 \\ -1 & 10 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 *= -1]{\substack{R_3 -= R_2 \\ R_1 += 2R_2}} \begin{bmatrix} 0 & 17 & \boxed{1} & -8 \\ \boxed{1} & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los elementos pivotes están en las columnas 1 y 3. Por lo tanto, las columnas 1 y 3 forman un subsistema básico de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Por consecuencia, los vectores

$$T(a_1) = 2b_1 - b_2 + 3b_3, \qquad T(a_3) = b_1 + 2b_3$$

forman una sublista básica del sistema $(T(a_1), T(a_2), T(a_3), T(a_4))$ y una base del espacio $\mathrm{im}(T)$ generado por $T(a_1), T(a_2), T(a_3), T(a_4)$.

Para construir una base del núcleo, consideremos el sistema de ecuaciones lineales homogéneas $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}x = \mathbf{0}$. Usando la forma pseudoescalonada reducida de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ escribimos la solución general:

$$\begin{bmatrix} 10x_2 - 5x_4 \\ x_2 \\ -17x_2 + 8x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base del conjunto solución de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}x = \mathbf{0}$, y los vector correspondientes del espacio V,

$$v_1 = 10a_1 + a_2 - 17a_3, \qquad v_2 = -5a_1 + 8a_3 + a_4,$$

forman una base del núcleo de T.

Comprobamos que $v_1, v_2 \in \ker(T)$:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} u_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - 3 - 17 + 0 \\ -10 + 10 + 0 + 0 \\ 30 + 4 - 34 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \checkmark$$

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} u_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 + 0 + 8 + 2 \\ 5 + 0 + 0 - 5 \\ -15 + 0 + 16 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Comprobamos que $T(a_2), T(a_4) \in \ell(T(a_1), T(a_3))$. Observando la matriz pseudoescalonada reducida vemos que se deben cumplir las igualdades

$$T(a_2) = -10T(a_1) + 17T(a_3), \qquad T(a_4) = 5T(a_1) - 8T(a_3).$$

Recordamos que las coordenadas de $T(a_1), \ldots, T(a_4)$ respecto la base $\mathcal{B}$ están escritas en las columnas de $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ y hacemos la comprobación:

$$\begin{aligned} -10T(a_1) + 17T(a_3) &= -10\bigl(2b_1 - b_2 + 3b_3\bigr) + 17\bigl(b_1 + 2b_3\bigr) \\ &= (-20 + 17)b_1 + (10 + 0)b_2 + (-30 + 34)b_3 \\ &= -3b_1 + 10b_2 + 4b_3 = T(a_2); \quad \checkmark \\ 5T(a_1) - 8T(a_3) &= 5\bigl(2b_1 - b_2 + 3b_3\bigr) - 8\bigl(b_1 + 2b_3\bigr) \\ &= (10 - 8)b_1 + (-5)b_2 + (15 - 16)b_3 \\ &= 2b_1 - 5b_2 - b_3 = T(a_4); \quad \checkmark \end{aligned}$$

Al final, probamos que se cumple la relación entre el rango y la nulidad:

$$\dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\ker(T)) = 2 + 2 = 4 = \dim(V). \quad \checkmark$$

□

8. Se considera la transformación lineal $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla:

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Construir una base en $\ker(T)$ y una base en $\operatorname{im}(T)$. Hacer las comprobaciones.

Solución. En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ usamos la base canónica $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos la matriz asociada al operador T respecto la base $\mathcal{E}$ (omitimos los cálculos):

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 6 & 0 \\ -6 & -11 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales transformamos $T_{\mathcal{E}}$ en una matriz pseudoescalonada reducida:

$$T_{\mathcal{E}} \xrightarrow{R_1 *= \frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += 6R_1]{R_3 += -11R_1} \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & 0 & 6 \\ -8 & -44/3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 *= \frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ -1 & -11/6 & 0 & 1 \\ -8 & -44/3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += -8R_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ -1 & -11/6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q}.$$

La solución general del sistema de ecuaciones lineales $T_{\mathcal{E}} x = \mathbf{0}_4$ es

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{4}{3}x_2 \\ x_1 + \frac{11}{6}x_2 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_1} + \frac{x_2}{6} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \\ 11 \end{bmatrix}}_{u_2}.$$

Las columnas u_1 y u_2 son elementos de $\mathbb{R}^4$; hay que convertirlas en matrices 2×2 para obtener una base de $\ker(T)$:

$$U_1 = 1E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 1E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad U_2 = 0E_1 + 6E_2 - 8E_3 + 11E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Comprobemos que $U_1, U_2 \in \ker(T)$. Para la matriz $U_1 = I_2$ la comprobación es trivial:

$$T(U_1) = T(I_2) = AI_2 - I_2A = A - A = \mathbf{0}_{2,2}.$$

Hagamos la comprobación para U_2:

$$\begin{aligned}
T(U_2) = AU_2 - U_2A &= \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -8 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0-48 & -24+66 \\ 0-56 & -48+77 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0-48 & 0+42 \\ 32-88 & -48+77 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -48 & 42 \\ -56 & 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -48 & 42 \\ -56 & 29 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2,2}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Para construir una base de la imagen notemos que en la matriz pseudoescalonada Q las columnas 3 y 4 forman una sublista básica, y las columnas 1 y 2 son sus combinaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 4/3 \\ -11/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{11}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto las matrices

$$T(E_3) = 6E_1 + 11E_3 - 6E_4 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad T(E_4) = 6E_2 + 8E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

forman una base de $\operatorname{im}(T)$, y las matrices $T(E_1)$ y $T(E_2)$ son sus combinaciones lineales:

$$T(E_1) = 0T(E_3) - T(E_4), \qquad T(E_2) = \frac{4}{3}T(E_3) - \frac{11}{6}T(E_4).$$

Hagamos la comprobación de las últimas igualdades:

$$0T(E_3) - T(E_4) = 0\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} = T(E_1); \quad \checkmark$$

$$\frac{4}{3}T(E_3) - \frac{11}{6}T(E_4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 44/3 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ -44/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -11 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = T(E_2). \quad \checkmark$$

Al final probamos que $\mathrm{r}(T) + \mathrm{nul}(T) = \dim(\text{dominio})$:

$$2 + 2 = 4. \quad \checkmark$$

□