Isomorfismos de espacios vectoriales. Espacios vectoriales isomorfos

Objetivos. Definir los conceptos de isomorfismo y de espacios vectoriales isomorfos. Demostrar el criterio de espacios vectoriales isomorfos en el caso de dimensión finita.

1. Definición (isomorfismo de espacios vectoriales). Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Una aplicación $T\colon V \to W$ se denomina *isomorfismo* de V sobre W si es biyectiva y lineal. Lo último significa que

$$\begin{aligned} &T(x \overset{V}{+} y) = T(x) \overset{W}{+} T(y) && \forall x, y \in V, \\ &T(\alpha \overset{V}{\cdot} x) = \alpha \overset{W}{\cdot} T(x) && \forall x \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

2. Ejemplo. La aplicación $T\colon \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$, definida por la regla

$$T\colon A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{1,2} \\ A_{1,3} \\ A_{2,1} \\ A_{2,2} \\ A_{2,3} \end{bmatrix},$$

es un isomorfismo.

3. Proposición. Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, $T\colon V \to W$ un isomorfismo. Entonces la aplicación inversa $T^{-1}\colon W \to V$ también es lineal y por lo tanto también es un isomorfismo.

4. Definición (espacios vectoriales isomorfos). Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo campo $\mathbb{F}$. Se dice que V y W son *isomorfos* y se escribe $V \cong W$ si existe un isomorfismo de V sobre W. Notación $V \cong W$.

5. Proposición.

- $V \cong V$.
- Si $V_1 \cong V_2$, entonces $V_2 \cong V_1$.
- Si $V_1 \cong V_2$ y $V_2 \cong V_3$, entonces $V_1 \cong V_3$.

6. Teorema. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T\colon V \to W$ un isomorfismo y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Entonces $\mathcal{B} = (T(a_1), \ldots, T(a_n))$ es una base de W y por consecuencia $\dim(W) = \dim(V)$.

Demostración. 1. Para demostrar que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente usemos las hipótesis que la función T es inyectiva y $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(a_j) = \mathbf{0}_W.$$

Aplicamos la linealidad de T en el lado izquierdo de la igualdad:

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\right) = \mathbf{0}_W.$$

La última igualdada significa que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j \in \ker(T).$$

Como la transformaciión T es inyectiva, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, así que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = \mathbf{0}_V.$$

Ahora la independencia lineal de $a_1, \ldots, a_n$ implica que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

2. Para demostrar que $\mathcal{B}$ genera a W usamos las hipótesis que T es suprayectiva y $\mathcal{A}$ genera a V. Sea $w \in W$. Como T es suprayectiva, existe un $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Como $v \in V = \ell(a_1, \ldots, a_n)$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j.$$

Aplicamos T a ambos lados de la última igualdad y recordamos que $T(v) = w$:

$$w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(a_j) \in \ell(T(a_1), \ldots, T(a_n)). \qquad \square$$

7. Teorema. Sea V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita n. Entonces $V \cong \mathbb{F}^n$.

Idea de la demostración. Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Construyamos el mapeo $T\colon \mathbb{F}^n \to V$,

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$

Entonces T es un isomorfismo. $\square$

8. Teorema. Sean V y W espacios vectoriales de la misma dimensión finita: $\dim(V) = \dim(W) < +\infty$. Entonces $V \cong W$.

Idea de la demostración. Puede aplicar el teorema anterior o construir un isomorfismo $T\colon V \to W$ usando algunas bases de V y W. $\square$

9. Teorema (criterio de que dos espacios vectoriales son isomorfos, en el caso de dimensión finita). Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Supongamos que $\dim(V) = n < +\infty$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

$$V \cong W \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dim(W) = n.$$

10. Ejemplo. $V^2(O) \cong \mathbb{R}^2$.

11. Ejemplo. $\mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^{n+1}$.

12. Ejemplo. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^{mn}$.

13. Ejercicios. Demuestre que cada uno de los siguientes espacios es isomorfo a $\mathbb{R}^d$ para algún d y calcule este número d:

- $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{R})$, esto es, matrices diagonales de orden n.
- $\mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$, esto es, matrices triangulares superiores de orden n.
- $\left\{f \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})\colon \quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\right\}$, esto es, polinomios pares de grado ≤ 5.
- El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas $Ax = \mathbf{0}_m$, donde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ es una matriz fija.