Transformaciones lineales isométricas
en espacios con producto interno

Objetivos. Estudiar el concepto de isomorfismos isométricos de espacios con producto interno, establecar un criterio (en términos de productos internos, normas, distancias y listas ortonormales). Mostrar que cualquier espacio euclidiano complejo de dimensión n es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}^n$, y cualquier espacio euclidiano real de dimensión n es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Requisitos. Norma y distancia inducidas por un producto interno, identidades de polarización.

1. Proposición (identidad de polarización para el producto interno en el caso complejo, repaso). Sea V un espacio complejo con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y sea $\|\cdot\|$ la norma generada por este producto interno. Entonces el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se puede expresar a través de la norma mediante la siguiente fórmula:

$$\langle a,b\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \,\|\,\mathrm{i}^k\, a+b\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|a+b\|^2 + \mathrm{i}\,\|\,\mathrm{i}\,a+b\|^2 - \|-a+b\|^2 - \mathrm{i}\,\|-\mathrm{i}\,a+b\|^2\right).$$

2. Definición (isometría de espacios métricos). Sean (X,d_X) y (Y,d_Y) espacios métricos. Una función $f\colon X\to Y$ se denomina *isometría* si

$$\forall a,b\in X \qquad d_Y(f(a),f(b)) = d_X(a,b).$$

3. Teorema (criterio de isometría lineal en espacios con producto interno). Sean $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ y $(W,\langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales (ambos complejos o ambos reales) con productos internos, y sea $T\in\mathcal{L}(V,W)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T preserva producto interno:

$$\langle Ta,Tb\rangle_W = \langle a,b\rangle_V \qquad \forall a,b\in V.$$

(b) T preserva norma:

$$\|Ta\|_W = \|a\|_V \qquad \forall a\in V.$$

(c) T es una isometría, esto es, preserva distancia:

$$d_W(T(a),T(b)) = d_V(a,b) \qquad \forall a,b\in V.$$

(d) T transforma listas ortonormales en listas ortonormales: si $m\in\mathbb{Z}$, $m\geq 1$ y $a_1,\ldots,a_m$ son algunos vectores ortonormales en V, entonces $T(a_1),\ldots,T(a_m)$ son vectores ortonormales en W.

Demostración. (a)⇒(b). Recordamos que en espacios con producto interno la norma se define en términos del producto interno. Supongamos que se cumple (a). Entonces para cualquier $a \in V$

$$\|Ta\|_W = \sqrt{\langle Ta, Ta \rangle_W} = \sqrt{\langle a, a \rangle_V} = \|a\|_V.$$

Como la distancia se define en términos de la norma, (b) implica (c). La definición de listas ortonormales está escrita en términos del producto interno, por eso (a) implica (d).

Supongamos (d) y demostremos (b). Sea $a \in V$. Si $a = \mathbf{0}_V$, entonces $Ta = \mathbf{0}_W$ y $\|Ta\|_W = 0 = \|a\|_V$. Si $a \neq \mathbf{0}_V$, entonces denotemos por u al vector normalizado:

$$u := \frac{a}{\|a\|_V},$$

y apliquemos la condición (d) con $m = 1$ al vector u. Obtenemos que $\|u\|_V = 1$ y

$$1 = \|Tu\|_W = \left\| T \left(\frac{1}{\|a\|_V} \, a \right) \right\|_W = \left\| \frac{1}{\|a\|_V} \, Ta \right\|_W = \frac{\|T(a)\|_W}{\|a\|_V}.$$

Supongamos (c) y demostremos (b). Recordemos que la norma se puede escribir a través de la distancia inducida.

$$\|Ta\|_W = d_W(Ta, \mathbf{0}_W) = d_W(Ta, T\mathbf{0}_V) = d_V(a, \mathbf{0}_V) = \|a\|_V.$$

Usando la identidad de polarización se demuestra que (b) implica (a). □

4. Ejercicio. Escriba bien la demostración del teorema.

Isomorfismos isométricos de espacios euclidianos o unitarios

5. Definición (isomorfismo isométrico). Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ y $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ espacios vectoriales (ambos complejos o ambos reales) con productos internos. Una función $T \colon V \to W$ se llama *isomorfismo isométrico* si es un isomorfismo lineal y una isometría.

6. Teorema (criterio de isomorfía isométrica de espacios euclidianos y unitarios). Sean V, W espacios vectoriales con productos internos sobre un campo $\mathbb{F}$, donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Supongamos que V y W son espacios de dimensiones finitas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) V y W son isometricamente isomorfos;

(b) $\dim(V) = \dim(W)$.

7. Ejercicio. Demuestre el teorema usando algunas bases ortonormales de V y W.

8. Corolario. Cualquier espacio euclidiano de dimensión n es isometricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$, y cualquier espacio unitario de dimensión n es isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}^n$.