Transformaciones lineales invertibles (no singulares)

Objetivos. Estudiar la definición y los criterios de invertibilidad de una transformación lineal.

Requisitos. Funciones inyectivas, suprayectivas e invertibles, relación entre el rango y la nulidad de una transformación lineal.

Funciones invertibles (definición y unicidad)

1. Definición (función invertible). Sean X, Y algunos conjuntos y sea $f\colon X \to Y$ una función. Se dice que f es *invertible* si existe una función $g\colon Y \to X$ tal que

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \wedge \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y,$$

esto es,

$$\big(\forall x \in X \quad g(f(x)) = x\big) \qquad \wedge \qquad \big(\forall y \in Y \quad f(g(y)) = y\big).$$

En este caso se dice que g es una *función inversa* a la función f.

Por supuesto, no toda función es invertible. La siguiente Proposición dice que si una función es invertible, entonces su inversa es única.

2. Proposición (unicidad de la función inversa, en el caso de la existencia). Sean X, Y algunos conjuntos, $f\colon X \to Y$ una función y $g, h\colon Y \to X$ algunas funciones tales que

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad h \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y, \qquad f \circ h = \mathrm{id}_Y\,.$$

Entonces $g = h$.

Demostración. $\quad g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h.$ $\square$

3. Relación entre funciones invertibles, biyectivas, inyectivas y suprayectivas (repaso). Una función se llama *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva. Una función es invertible si, y sólo si, es biyectiva.

Linealidad de la función inversa a una transfomación lineal

4. Observación. La Definición 1 se puede aplicar, en particular, a transformaciones lineales. Sean V y W algunos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Se dice que T es *invertible* si existe una función $U\colon W \to V$ tal que

$$U \circ T = I_X \qquad \wedge \qquad T \circ U = I_Y.$$

Si existe una función U con estas propiedades, entonces por la Proposición 2 esta es única y se denota por T^{-1}. Como muestra la siguiente Proposición, en esta situación la función T^{-1} automáticamente es lineal.

5. Proposición (linealidad de la función inversa a una transfomación lineal). Sean V, W algunos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ una transfomación lineal invertible. Entonces T^{-1} es lineal, esto es, $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Demostración. Sean $a, b \in W$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda a + b) &\overset{(1)}{=\!=} T^{-1}\big(\lambda I_Y(a) + I_Y(b)\big) \overset{(2)}{=\!=} T^{-1}\big(\lambda(T \circ T^{-1})(a)) + (T \circ T^{-1})(b))\big) \\ &\overset{(3)}{=\!=} T^{-1}\big(\lambda T(T^{-1})(a)) + T(T^{-1}(b))\big) \overset{(4)}{=\!=} T^{-1}\big(T(\lambda T^{-1}(a) + T^{-1}(b))\big) \\ &\overset{(5)}{=\!=} (T^{-1} \circ T)(\lambda T^{-1}(a) + T^{-1}(b)) \overset{(6)}{=\!=} I_X(\lambda T^{-1}(a) + T^{-1}(b)) \\ &\overset{(7)}{=\!=} \lambda T^{-1}(a) + T^{-1}(b). \end{aligned}$$

Justificación de los pasos:

(1)	La definición de I_Y.
(2), (6)	La definición de T^{-1}.
(3), (5)	La definición de la composición de funciones.
(4)	La linealidad de T.
(6)	La definición de I_X.

$\square$

6. Observación sobre varias definiciones equivalentes de la invertibilidad de una transformación lineal. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- Existe una función $U\colon W \to V$ tal que $U \circ T = I_X$ y $T \circ U = I_Y$.
- Existe una transfomación lineal $U \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que $UT = I_X$ y $TU = I_Y$.
- T es inyectiva y suprayectiva.

7. Terminología. Las transformaciones lineales invertibles también se llaman *transformaciones no singulares*, *isomorfismos lineales* o *isomorfismos de espacios vectoriales*.

Teoremas sobre de invertibilidad de transformaciones lineales

Consideremos el caso de espacios vectoriales de dimensiones finitas,

8. Criterio de transformación lineal inyectiva en términos de la nulidad (repaso). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

$$T \text{ es inyectiva} \quad \iff \quad \ker(T) = \{0\} \quad \iff \quad \operatorname{nul}(T) = 0.$$

9. Criterio de transformación lineal suprayectiva en términos del rango. Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, donde W es de dimensión finita, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

$$T \text{ es sobre} \quad \iff \quad \operatorname{im}(T) = W \quad \iff \quad \operatorname{r}(T) = \dim(W).$$

10. Teorema sobre el rango y la nulidad de una transfomación lineal (repaso). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, donde V es de dimensión finita, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces

$$\operatorname{r}(T) + \operatorname{nul}(T) = \dim(V). \tag{1}$$

11. Teorema: si una transfomación lineal es invertible, entonces la dimensión del dominio coincide con la dimensión del contradominio. Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, donde V es de dimensión finita, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ una transfomación lineal invertible. Entonces W es de dimensión finita y $\dim(V) = \dim(W)$.

Primera demostración. Como T es inyectiva, $\operatorname{nul}(T) = 0$. De la fórmula (1) obtenemos que $\dim(\operatorname{im}(T)) = \operatorname{r}(T) = \dim(V)$. Pero T es suprayectiva, así que $W = \operatorname{im}(T)$ y $\dim(W) = \dim(V)$. $\square$

Segunda demostración. Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ pongamos $b_j = T(a_j)$. Demostremos que la lista $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base de W. Como $\mathcal{A}$ es linealmente independiente y T es inyectiva, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Como $\mathcal{A}$ genera a V y T es suprayectiva, $\mathcal{B}$ genera a W. $\square$

El Teorema 11 significa que una transformación lineal de espacios de dimensiones finitas puede ser invertible *solamente* si coinciden las dimensiones del dominio y del contradominio. Ahora vamos a estudiar la invertibilidad de transformaciones lineales *suponiendo* que $\dim(V) = \dim(W)$.

12. Teorema (criterio de invertibilidad de una transformación lineal en el caso cuando las dimensiones del dominio y del contradominio coinciden). Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = \dim(W) = n < \infty$. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es invertible.

(b) T es inyectiva ($\iff \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$).

(c) T es suprayectiva ($\iff \operatorname{im}(T) = W$).

Demostración. Idea de la demostración: aplicar la fórmula

$$\mathrm{r}(T) + \mathrm{nul}(T) = n. \tag{2}$$

Sabemos que

$$\text{(a)} \quad \iff \quad \text{(b)} \quad \wedge \quad \text{(c)}.$$

Por lo tanto, (a)$\Rightarrow$(b) y (a)$\Rightarrow$(c).

Mostremos que (b) implica (c). Supongamos que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Entonces $\mathrm{nul}(T) = 0$ y por la fórmula (2) obtenemos que $\mathrm{r}(T) = n$, esto es, $\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(W)$. Pero $\operatorname{im}(T) \le W$. Así que $\operatorname{im}(T) = W$.

Mostremos que (c) implica (b). Supongamos que $\operatorname{im}(T) = W$. Entonces $\mathrm{r}(T) = n$ y por la fórmula (2) obtenemos que $\mathrm{nul}(T) = 0$, esto es, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Para terminar la demostración recordamos que las condiciones (b) y (c) juntas implican la condición (a). $\square$

13. Proposición (criterio de invertibilidad de una transformación lineal en términos de su matriz). Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = \dim(W) = n < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sea $\mathcal{E}$ una base de V y sea $\mathcal{F}$ una base de W. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

$$T \text{ es invertible} \qquad \iff \qquad T_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \text{ es invertible.}$$

Demostración. Hay varias demostaciones. Esta demostración es muy breve porque está basada en tres proposiciones fuertes: el criterio anterior, el criterio de la invertibilidad de una matriz en términos de su rango, la igualdad $\mathrm{r}(T) = \mathrm{r}(T_{\mathcal{F},\mathcal{E}})$.

$$T \text{ es invertible} \quad \iff \quad \mathrm{r}(T) = n \quad \iff \quad \mathrm{r}(T_{\mathcal{F},\mathcal{E}}) = n \quad \iff \quad T_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \text{ es invertible.} \quad \square$$

14. Tarea adicional. Demuestre la proposición anterior de otra manera. Use la definición de matriz invertible, la fórmula de la matriz del producto y la proposición sobre la correspondencia entre matrices y transformaciones lineales.

15. Ejemplos. Transformaciones lineales A, B, C, D están dadas por sus matrices en algunas bases:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	A	B	C	D
dim(dominio)				
dim(contradominio)				
rango = dim(im)				
nulidad = dim(ker)				
¿es inyectiva?				
¿es suprayectiva?				
¿es invertible?				

16. Ejercicios. Las transformaciones A, B, C, D están definidas por sus matrices en ciertas bases:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Llene la tabla como en los ejemplos anteriores.

17. Ejercicios. Llene la tabla como en los ejemplos anteriores para los siguientes operadores lineales:

1. $D\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad D(f) = f'$.
2. $D\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad D(f) = f'$.
3. Operador de rotación $R_\alpha\colon V^2(O) \to V^2(O)$.
4. Operador de proyección del plano a una recta, $P\colon V^2(O) \to V^2(O)$.