Criterio de invertibilidad de una matriz en términos de su determinante. Cálculo de la matriz inversa a través de cofactores

Objetivos. Demostrar el criterio de invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de su determinante: A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Expresar A^{-1} a través de la matriz adjunta clásica de A (es decir, a través de los cofactores de A).

Requisitos. Matriz adjunta clásica (matriz de cofactores transpuesta) y su propiedad principal, determinante y sus propiedades.

1. Propiedad principal de la matriz adjunta clásica (repaso).

$$A\,\operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)A = \det(A)I.$$

2. Teorema (criterio de la inversibilidad de una matriz en términos de su determinante). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces:

$$A \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A) \neq 0.$$

Además, si $\det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\operatorname{adj}(A).$$

Demostración. 1. Supongamos que A es invertible y demostremos que $\det(A) \neq 0$. Por la propiedad multiplicativa del determinante,

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

De ahí $\det(A) \neq 0$.

2. Supongamos que $\det(A) \neq 0$ y demostremos que la matriz $\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$ es la inversa de A. Para calcular su producto usamos la propiedad principal de la matriz $\operatorname{adj}(A)$ y propiedades del producto de matrices:

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right) = \frac{1}{\det(A)}\,(A \cdot \operatorname{adj}(A)) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A)I = I;$$

$$\left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right)A = \frac{1}{\det(A)}\,(\operatorname{adj}(A) \cdot A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A)I = I. \qquad \square$$

En los siguientes dos ejercicios se indican otras maneras de demostrar este teorema.

3. Ejercicio. Probar el criterio anterior (A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$) usando operaciones elementales por renglones.

4. Ejercicio. Demuestre directamente que si $\mathrm{r}(A) < n$, entonces $\det(A) = 0$. Sugerencia: la condición $\mathrm{r}(A) < n$ significa que los renglones de A son linealmente dependientes, esto es, uno de los renglones es una combinación lineal de los anteriores: existen $p \in \{1, \ldots, n\}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{F}$ tales que

$$A_{p,*} = \sum_{i=1}^{p-1} A_{i,*}.$$

5. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz invertible por la izquierda, es decir, existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $BA = I_n$. Usando determinantes demuestre que A es invertible.

6. Ejemplos (prueba de la invertibilidad con ayuda del determinante). Calcular los determinantes de las matrices dadas y determinar si las matrices son invertibles o no:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Ejercicio. Determine para qué valores del parametro t la siguiente matriz $A(t)$ es invertible:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ t & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Ejemplo (cálculo de la matriz inversa a través de los cofactores). Calcular la matriz A^{-1} a través de $\mathrm{adj}(A)$ y hacer la comprobación:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Ejercicio. Calcule las matrices A^{-1} y B^{-1}, haga las comprobaciones:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & -5 \end{bmatrix}.$$

10. Observación. La fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ no es muy útil para cálculos numéricos porque necesita muchísimas operaciones aritméticas. Pero esta fórmula tiene varias aplicaciones teóricas. Por ejemplo, con esta fórmula uno puede ver que si las entradas de una matriz son funciones derivables de un parámetro μ, entonces las entradas de la matriz inversa también son funciones derivables del parámetro μ.

11. Ejercicio. Sea A un matriz general invertible 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad \text{con} \qquad \det(A) = ad - bc \neq 0.$$

Calcule las matrices $\operatorname{adj}(A)$ y A^{-1}. Haga la comprobación.

12. Ejercicio. Calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$