Definición de la matriz inversa

Ejercicios

Objetivos. Aprender la definición de la matriz inversa.

Requisitos. Multiplicación de matrices, matriz identidad, habilidades básicas de resolver sistemas de ecuaciones.

Ejemplo. El número real 1 es un *elemento neutro* bajo la multiplicación en $\mathbb{R}$ porque

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad a \cdot 1 = a \qquad \text{y} \qquad 1 \cdot a = a.$$

Como la multiplicación en $\mathbb{R}$ es conmutativa, sería suficiente pedir solamente una de las igualdades de arriba.

1. ¿Cuál matriz es un elemento neutro bajo la multiplicación de matrices?. Recuerde cuál matriz X hace papel del número 1, es decir cumple con la propiedad que $AX = A$ y $XA = A$ para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad A \underbrace{\qquad}_{?} = A \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\qquad}_{?} A = A.$$

Ejemplo. El número $\frac{4}{7}$ es *inverso* al número $\frac{7}{4}$ porque

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = 1.$$

2. Definición de que una matriz es inversa a otra. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que la matriz B es *inversa* a la matriz A si se cumplen las siguientes igualdades:

$$AB = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad\qquad BA = \underbrace{\qquad}_{?}$$

3. Compare los papeles de las matrices A y B en la definición escriba arriba:

En la definición anterior las matrices A y B hacen papeles $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Por lo tanto, si la matriz B es inversa a la matriz A, entonces

$$\ldots$$

También se puede decir que en esta situación las matrices A y B son *mutualmente inversas*.

Probar si dos matrices dadas son mutualmente inversas

4. Ejemplo. Determinar si la matriz C es inversa a la matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución. Calculemos los productos BC y CB:

$$BC = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & \qquad\qquad \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ & \end{bmatrix},$$

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ & \end{bmatrix}.$$

Resumen: la matriz C $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{¿es o no es?}}$ inversa a la matriz B. □

5. Ejemplo. Determinar si C es inversa a B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Calculemos los productos BC y CB:

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ & \end{bmatrix},$$

$$CB = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad \\ & \end{bmatrix}.$$

Resumen: la matriz C $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{¿es o no es?}}$ inversa a la matriz B. □

6. Proposición: unicidad de la matriz inversa. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que cada una de las matrices B y C es inversa a la matriz A. Entonces

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$$

Demostración. Por la hipótesis, la matriz B es inversa a la matriz A,

$$AB = BA = I_n. \tag{$*$}$$

La matriz C también es inversa a la matriz A:

$$AC = CA = I_n. \tag{$**$}$$

Ahora calculamos el producto BAC de dos maneras diferentes:

$$\begin{tikzcd}
(BA)C \arrow[r, equal, "\text{(ii)}"] \arrow[d, equal, "\text{(i)}"'] & I_nC \arrow[r, equal, "\text{(iii)}"] & {} \\
B(AC) \arrow[r, equal, "\text{(iv)}"'] & {} \arrow[r, equal, "\text{(v)}"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Justificación de las igualdades:

(i)

(ii) Por la condición $(*)$.

(iii)

(iv)

(v) $\square$

7. Observación. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz invertible, entonces su inversa se denota por A^{-1}. Por definición de la matriz inversa tenemos que:

$$AA^{-1} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad\qquad A^{-1}A = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Ejemplo del cálculo de la matriz inversa por definición

Para algunas matrices pequeñas la matriz inversa se puede calcular por definición.

8. Usando solamente la definición calcule la matriz inversa a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Buscamos una matriz $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que satisfaga la condición

$$AX = I_2.$$

Al encontrar X vamos a probar que X satisface también la condición $XA = I_2$.

Denotemos las entradas de la matriz X por $X_{i,j}$ y calculemos el producto AX:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

La matriz AX debe ser igual a la matriz identidad I_2:

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Igualando las entradas correspondientes obtenemos un sistema de 4 ecuaciones:

entrada $(1,1)$: $\qquad =$

entrada $(1,2)$: $\qquad =$

entrada $(2,1)$: $\qquad =$

entrada $(2,2)$: $\qquad =$

Resolvemos el sistema empezando con las ecuaciones más sencillas. Respuesta:

$X_{1,1} =$ $\qquad$ $X_{1,2} =$

$X_{2,1} =$ $\qquad$ $X_{2,2} =$

La matriz X:

$$X = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Combrobamos que X satisface también la ecuación $XA = I_2$:

$$XA = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}. \quad \square$$

Ejemplos de matrices no invertibles

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *no invertible* si no existe ninguna matriz que sea inversa a la matriz A.

9. Demuestre que la matriz nula $\mathbf{0}_{2,2}$ no es invertible.

Solución. Supongamos que X es la matriz inversa a la matriz $\mathbf{0}_{2,2}$. Entonces se deberían cumplir las siguientes igualdades:

$$X\mathbf{0}_{2,2} = I_2, \qquad \mathbf{0}_{2,2}X = I_2.$$

Pero en realidad

$$X\mathbf{0}_{2,2} = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,1}0 + X_{1,2}0 & \qquad\qquad\qquad\qquad \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad & \\ & \end{bmatrix}.$$

Vemos que X no cumple con la igualdad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ y por lo tanto no es inversa a la matriz $\mathbf{0}_{2,2}$. $\square$

10. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz cuya segunda columna es nula. Demuestre que A no es invertible.

Solución. Demostremos que $XA \neq I_3$ para cualquier matriz $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Denotemos las entradas de X por $X_{i,j}$ y las entradas de A por $A_{i,j}$, tomemos en cuenta que la segunda columna de A es nula:

$$X = \begin{bmatrix} \qquad & \qquad & \qquad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & A_{1,3} \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Calculemos el producto XA:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} X_{1,1}A_{1,1} + X_{1,2}A_{2,1} + X_{1,3}A_{3,1} & \qquad\qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array}\right]$$

Vemos que la $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ columna del producto XA es $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$, así que $XA \neq I_3$. $\square$

11. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ una matriz con segundo renglón nulo. Demuestre que A no es invertible.

Solución. Para cualquier matriz $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vamos a demostrar que

$$AX \neq I_2 \qquad \text{o} \qquad XA \neq I_2.$$

Consideramos ambos productos esperando que suceda algo interesante en alguno de estos:

$$AX = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad \\ \\ \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix};$$

$$XA = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad \\ \\ \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}.$$

Termine la solución.

$\square$

12. Ejemplo de una matriz que no tiene renglones nulos ni columnas nulas pero no es invertible. Usando solamente la definición demuestre que la siguiente matriz no es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Sea X una matriz arbitraria 2×2. Denotemos sus entradas por $X_{i,j}$. Mostremos que no se cumple la igualdad $AX = I_2$.

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Igualando la matriz AX a la matriz I_2 obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones:

ecuación para la entrada $(1,1)$:

ecuación para la entrada $(1,2)$:

ecuación para la entrada $(2,1)$:

ecuación para la entrada $(2,2)$:

Sumando o restando algunas de estas ecuaciones obtenga una contradicción, con esto va a demostrar que el sistema no tiene ninguna solución.

$\square$