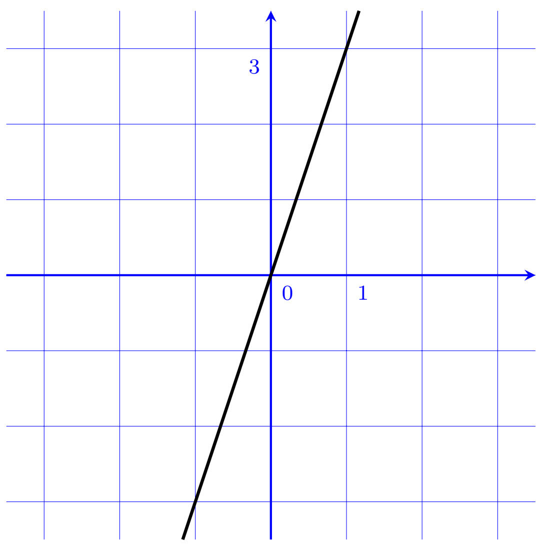
Primer conocimiento con transformaciones lineales

Autores: Oscar García Hernández, Román Higuera García y Egor Maximenko.

La materia Álgebra II que empezamos a estudiar se podría llamar *Álgebra Lineal, nivel básico*, y el curso de Álgebra III es *Álgebra Lineal, nivel intermedio*. El objeto principal que estudia Álgebra Lineal son **transformaciones lineales en espacios de dimensión finita**. Luego estudiaremos el sentido de estas palabras. Ahora sólo veremos de manera muy rápida un par de ejemplos de transformaciones lineales, para obtener la primera idea de qué se trata en la materia Álgebra II. El alumno no debe entender estos ejemplos de inmediato.

Ejemplo de una transformación lineal $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$f(x) = 3x.$$

Funciones de este tipo surgen frecuentemente, tanto en ciencias como en la vida cotidiana. Un ejemplo simple: si 3 pesos es el precio de un boleto del metro y denotemos por x el número de boletos que uno quiere comprar, entonces $f(x)$ es el precio total.

Notemos dos propiedades importantes de esta función:

$$f(x+y) \overset{(1)}{=\!=} 3(x+y) \overset{(2)}{=\!=} 3x + 3y \overset{(3)}{=\!=} f(x) + f(y);$$

$$f(\lambda x) \overset{(4)}{=\!=} 3(\lambda x) \overset{(5)}{=\!=} (3\lambda)x \overset{(6)}{=\!=} (\lambda \cdot 3)x \overset{(7)}{=\!=} \lambda(3x) \overset{(8)}{=\!=} \lambda f(x).$$

En los pasos (1), (3), (4) y (8) aplicamos la definición de f, en el paso (2) usamos la propiedad distributiva de la multiplicación en $\mathbb{R}$ respecto a la adición en $\mathbb{R}$. Un ejercicio simple: justificar los pasos (5), (6) y (7).

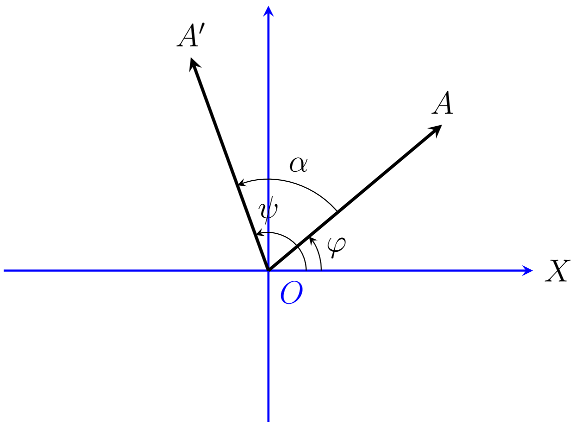
Acabamos de demostrar que la función f es *aditiva* y *homogénea*:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Cualquier función que cumple con estas dos propiedades se llama *función lineal* o *transformación lineal* (el nombre vino de la gráfica que es una linea recta). En este ejemplo el dominio de f es $\mathbb{R}$, y el contradominio también. Más general, el dominio y el contradominio podrían ser $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, o aún más general, algunos *espacios vectoriales*.

Rotación como un ejemplo de transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Consideremos la rotación del plano al ángulo α.



Cada vector $\overrightarrow{OA}$ se transforma en un vector $\overrightarrow{OA'}$, donde el ángulo entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ es α:

$$\underbrace{\angle XOA'}_{\psi} = \underbrace{\angle XOA}_{\varphi} + \alpha.$$

El dibujo corresponde al caso $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Usando las coordenadas polares podemos escribir $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ como

$$\overrightarrow{OA} = a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{OA'} = a' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi+\alpha) \\ r\,\mathrm{sen}(\varphi+\alpha) \end{bmatrix}.$$

Recordemos las principales identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta), \\ \sin(\alpha+\beta) &= \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las identidades de arriba el vector $\overrightarrow{OA'}$ se puede escribir como:

$$a' = \begin{bmatrix} a_1\cos(\alpha) - a_2\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ a_1\,\mathrm{sen}(\alpha) + a_2\cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

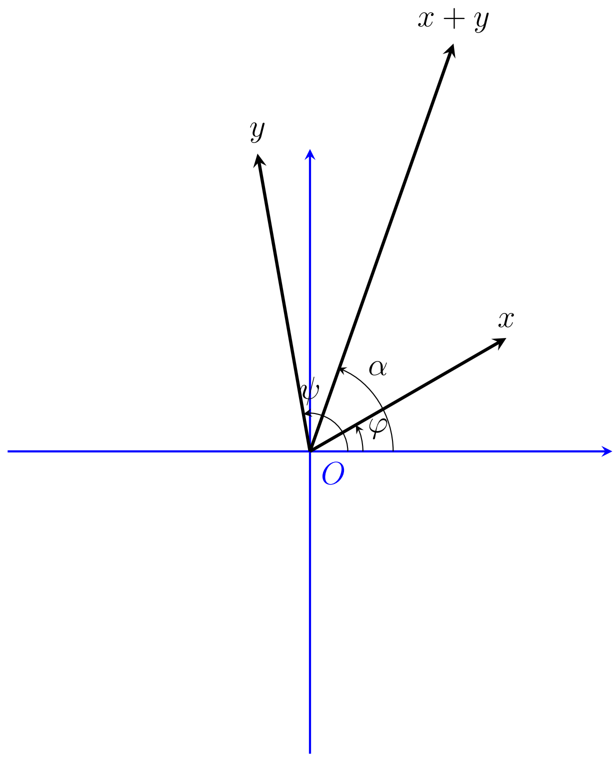
Observando esto resulta sensato definir la transformación lineal de rotación $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como:

$$T(x) \coloneqq T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \coloneqq \begin{bmatrix} x_1\cos(\alpha) - x_2\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ x_1\,\mathrm{sen}(\alpha) + x_2\cos(\alpha) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

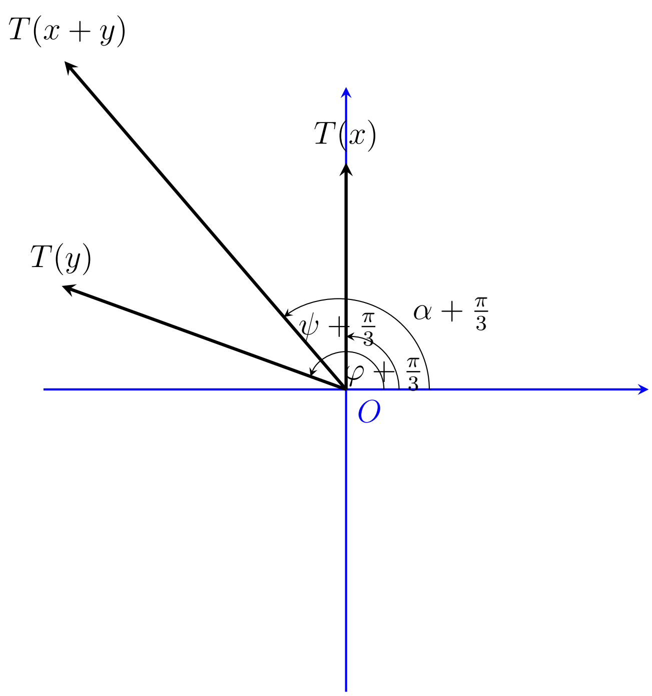
La tabla de coeficientes que aparecen en la fórmula (1) se llama la *matriz de rotación*:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

La transformación de rotación es aditiva y homogénea. Ahora no vamos a demostarlo de manera formal, sólo mostremos la propiedad aditiva con un dibujo.

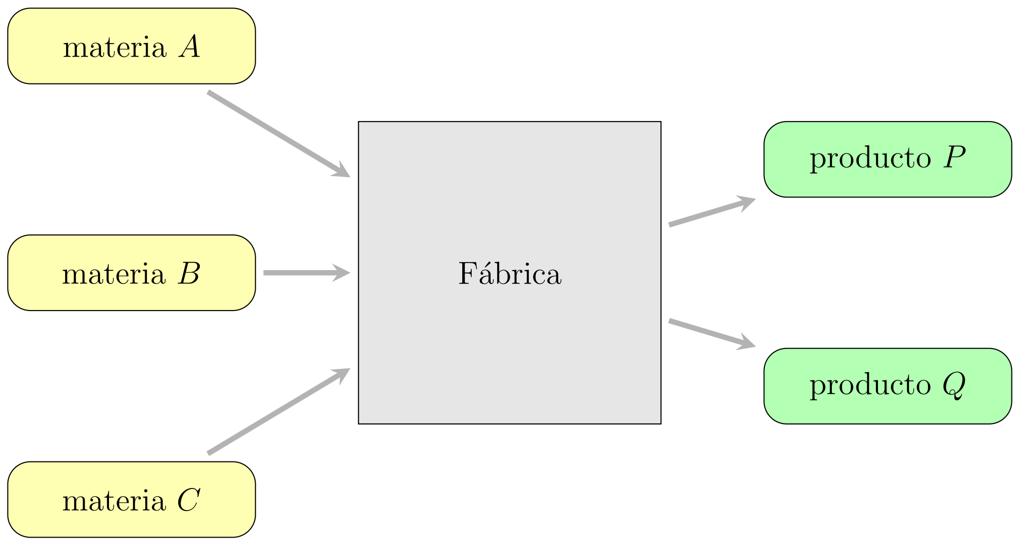


Después de aplicar la transformación T:



Ejemplo de una transformación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Una fabrica produce dos tipos diferentes de productos químicos: P y Q, de tres materias primas A, B, C (por ejemplo, C puede ser un combustible para dar la energía).



La manufactura de los productos requiere las siguientes cantidades de materias primas:

- Para producir una tonelada de P se necesitan:
  0.3 toneladas de A, 0.8 toneladas de B y 2 toneladas de C.

- Una tonelada de Q requiere:
  1 tonelada de A, 0.5 toneladas de B y 3 toneladas de C.

Denotemos por p y q la cantidad (en toneladas) de los productos P y Q que se producen durante una semana. Entonces las cantidades a, b, c de las materias primas se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$a = 0.3p + 1q,$$

$$b = 0.8p + 0.5q,$$

$$c = 2p + 3q.$$

Consideremos la función que calcula a, b, c para cualesquiera p, q dados:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{cantidad de } P\\ \text{cantidad de } Q\end{array}} \xrightarrow{\quad f \quad} \boxed{\begin{array}{c}\text{cantidad de } A\\ \text{cantidad de } B\\ \text{cantidad de } C\end{array}}$$

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\right) \coloneqq \begin{bmatrix} 0.3p + 1q \\ 0.8p + 0.5q \\ 2p + 3q \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Resulta que esta función es lineal (ahora no lo vamos a demostrar):

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

La tabla de los coeficientes que participan en la fórmula (2) se llama la *matriz* asociada a la transformación lineal f:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.8 & 0.5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo la función f es cómoda para pensar en los siguientes problemas:

- ¿Es posible elegir p y q de tal manera que $a = 10$, $b = 5$, $c = 30$? Es un problema de análisis de un sistema de ecuaciones, vamos a resolver estos problemas en Álgebra II.

- Si se saben los precios de A, B, C, P, Q y hay ciertas restricciones (por ejemplo, se pueden conseguir sólo 10 toneladas de A a la semana), ¿cómo planear la producción de tal manera que dé la ganancia máxima? Es un problema de Optimización Lineal, esta materia utiliza mucho el lenguaje y los resultados de Álgebra Lineal.