Intersección y suma de subespacios

Objetivos. Demostrar que la intersección y la suma de dos subespacios de un espacio vectorial también son sus subespaicios.

Requisitos. Espacio vectorial, subespacio vectorial.

Estamos suponiendo que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

1. Proposición (intersección de dos subespacios es un subespacio). Sean S_1 y S_2 subespacios de V. Entonces $S_1 \cap S_2$ también es un subespacio de V.

2. Definición (suma de subespacios). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sean S_1 y S_2 subespacios de V. Entonces la *suma* de S_1 y S_2 se define mediante la fórmula:

$$S_1 + S_2 \coloneqq \big\{ v \in V\colon \quad \exists a \in S_1 \quad \exists b \in S_2 \quad v = a + b \big\}. \tag{1}$$

Lo mismo también se escribe de manera más breve:

$$S_1 + S_2 \coloneqq \big\{ a + b\colon \quad a \in S_1, \quad b \in S_2 \big\}. \tag{2}$$

Hay que comprender que (1) es la definición verdadera que se puede usar en demostraciones, y (2) es solamente una forma breve de escribir (1).

3. Proposición (suma de dos subespacios es un subespacio). Sean S_1 y S_2 subespacios de V. Entonces $S_1 + S_2$ también es un subespacio de V.

4. Conjunto generador de la suma. Sean S_1 y S_2 subespacios de V, generados por conjuntos finitos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$:

$$S_1 = \ell(\mathcal{A}), \qquad S_2 = \ell(\mathcal{B}).$$

Entonces

$$S_1 + S_2 = \ell(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}).$$

5. Ejercicio. De un ejemplo de conjuntos finitos de vectores $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ (o $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V^3(O)$) tales que

$$\ell(\mathcal{A}) \cap \ell(\mathcal{B}) \neq \ell(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}).$$

6. Ejemplo (dos planos en el espacio $V^3(O)$). En el espacio $V^3(O)$ consideremos dos planos Π_1 y Π_2 tales que $O \in \Pi_1$, $O \in \Pi_2$ y la intersección $\Pi_1 \cap \Pi_2$ es una recta ℓ_1. Entonces Π_1 y Π_2 son subespacios de $V^3(O)$. Más adelante demostraremos que su suma coincide con todo el espacio $V^3(O)$.

Ejemplos

7. Calcule $S_1 \cap S_2$, donde S_1 y S_2 son los siguientes subespacios del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$S_1 \coloneqq \ell(5 + 3x + 2x^2, 3 + 2x + x^2), \qquad S_2 \coloneqq \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon\ f(-2) = 0 \big\}.$$

Solución. La forma general de los elementos de S_1 es

$$f(x) = \alpha(5 + 3x + 2x^2) + \beta(3 + 2x + x^2),$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculemos $f(-2)$:

$$f(-2) = \alpha(5 - 6 + 8) + \beta(3 - 4 + 4) = 7\alpha + 3\beta.$$

Para que f pertenezca a S_2, se debe cumplir la igualdad

$$7\alpha + 3\beta = 0,$$

de la cual $\beta = -\frac{7}{3}\alpha$. Denotando $\frac{\alpha}{3}$ por γ obtenemos

$$\alpha = 3\gamma, \qquad \beta = -7\gamma,$$

y finalmente

$$f(x) = 3\gamma(5 + 3x + 2x^2) - 7\gamma(3 + 2x + x^2) = \gamma(-6 - 5x - x^2) = -\gamma(6 + 5x + x^2).$$

Aquí γ puede ser cualquier número real.

Respuesta:

$$S_1 \cap S_2 = \ell(g), \qquad \text{donde} \qquad g(x) = 6 + 5x + x^2.$$

Probemos que $g \in S_2$:

$$g(-2) = 6 - 10 + 4 = 0. \qquad \checkmark$$

$\square$

8. Calcule $S_1 \cap S_2$, donde S_1 y S_2 son los siguientes subespacios del espacio $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$S_1 \coloneqq \ell(2 + 2x + x^2, 5 - x + 2x^2), \qquad S_2 \coloneqq \big\{ f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon \; f'(3) = 0 \big\}.$$

Solución. Los elementos del subespacio S_1 son polinomios de la forma

$$f(x) = \lambda(2 + 2x + x^2) + \mu(5 - x + 2x^2),$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Calculemos $f'(x)$ y luego $f'(3)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda(2 + 2x) + \mu(-1 + 4x), \\ f'(3) &= 8\lambda + 11\mu. \end{aligned}$$

Vemos que f pertenece a S_2 si, y sólo si, los coeficientes λ y μ están relacionados por

$$8\lambda + 11\mu = 0.$$

De aquí $\mu = -\dfrac{8}{11}\lambda$. La forma general de los elementos de $S_1 \cap S_2$ es

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda(2 + 2x + x^2) - \frac{8}{11}\lambda(5 - x + 2x^2) \\ &= \frac{\lambda}{11}(-18 + 30x - 5x^2) = -\frac{\lambda}{11}(18 - 30x + 5x^2), \end{aligned}$$

donde λ es un coeficiente real arbitrario, y por lo tanto $\frac{\lambda}{11}$ también es un coeficiente real arbitrario.

Respuesta:

$$S_1 \cap S_2 = \ell(g), \qquad \text{donde} \qquad g(x) = 18 - 30x + 5x^2.$$

Probemos que $g \in S_2$:

$$g'(x) = -30 + 10x, \qquad g'(3) = -30 + 30 = 0. \qquad \checkmark$$

$\square$

9. Calcule $S_1 \cap S_2$, donde S_1 y S_2 son los siguientes subespacios del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$S_1 := \ell(A, B), \qquad S_2 = \big\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \ \operatorname{tr}(X) = 0\big\};$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -9 & -10 \end{bmatrix}.$$

Solución. La forma general de los elementos de S_1 es

$$X = \lambda A + \mu B,$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Calculemos la traza de X:

$$\operatorname{tr}(X) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B) = -10\lambda - 15\mu.$$

De aquí vemos que $X \in S_2$ si, y sólo si,

$$-10\lambda - 15\mu = 0.$$

Tratamos μ como una variable libre y despejamos λ:

$$\lambda = -\frac{3\mu}{2}.$$

La forma general de los elementos de $S_1 \cap S_2$ es

$$X = -\frac{3}{2}\mu A + \mu B = \frac{\mu}{2}\left(-3\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -7 & -6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -9 & -10 \end{bmatrix}\right) = \frac{\mu}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$S_1 \cap S_2 = \ell(C), \qquad \text{donde} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $C \in S_2$:

$$\operatorname{tr}(C) = 2 - 2 = 0. \qquad \checkmark$$

$\square$

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejemplos muestre que S_1 y S_2 son subespacios de V, halle $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$ y determine si V es la suma directa de S_1 y S_2 o no.

10. $V = \mathbb{R}^2$,

$$S_1 = \ell(e_1) = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x_2 = 0\big\}, \qquad S_2 = \ell(e_2) = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \quad x_1 = 0\big\}.$$

donde e_1, e_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

11. Matrices triangulares superiores y triangulares inferiores. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $S_1 = \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$, $S_2 = \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$.

12. Funciones continuas pares e impares. $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, S_1 y S_2 son subespacios de funciones pares e impares respectivamente:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon \quad g(-x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}, \\ S_2 &= \{h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon \quad h(-x) = -h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

13. $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 = 0\}$.

14. Observación sobre la unión de dos subespacios. Por lo común, la unión de dos subespacios de un espacio vectorial V no es subespacio de V. Por ejemplo, en el espacio real $\mathbb{R}^2$ consideremos dos subespacios:

$$S_1 = \ell(e_1) = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \ x_2 = 0\big\}, \qquad S_2 = \ell(e_2) = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \ x_1 = 0\big\}.$$

Entonces el conjunto $S_1 \cup S_2$ no es cerrado bajo la adición y por lo tanto no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

15. Problema sobre la unión de dos subespacios. Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V tales que $S_1 \cup S_2$ también es un subespacio de V. Demuestre que $S_1 \subseteq V$ o $S_2 \subseteq V$.