Imágenes de las potencias de un operador lineal

Objetivos. Mostrar que los subespacios $\mathrm{im}(I)$, $\mathrm{im}(T)$, $\mathrm{im}(T^2)$, $\ldots$, forman una sucesión decreciente, y si en esta sucesión dos elementos coinciden, entonces a partir de este momento la sucesión es constante.

Requisitos. Imagen de una función.

Notamos que los resultados de esta sección son válidos para cualquier función cuyo dominio coincide con el contradominio, pero nosotros sólo consideramos el caso de operadores lineales. En este tema suponemos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. La notación $A \subset B$ significa que A es un subconjunto de B (no se excluye el caso $A = B$).

1. Ejemplo. Sean A y B las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por T_A y T_B a los operadores lineales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociados con las matrices A y B, respectivamente:

$$T_A(x) \coloneqq Ax, \qquad T_B(x) \coloneqq Bx \qquad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Entonces $(T_A T_B)(x) = ABx = T_{AB}(x)$, donde

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Reducimos las matrices A, B y AB usando operaciones elementales por filas y marcamos con verde los pivotes de las matrices reducidas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += -3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 *= 1/7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += 2R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= 1/2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += 3R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= 1/8} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += -3R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La imagen de T_A está generado por las columnas de la matriz A que corresponden a los pivotes de la matriz A reducida, análogamente para T_B y T_{AB}:

$$\mathrm{im}(T_A) = \ell\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{im}(T_B) = \ell\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right), \quad \mathrm{im}(T_{AB}) = \ell\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

Se puede observar que $\mathrm{im}(T_{AB}) \subset \mathrm{im}(T_A)$, y los conjuntos T_{AB} y T_B no se pueden comparar: T_{AB} no está contenido en T_B ni viceversa.

2. Proposición (sobre la imagen de la composición). Sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces

$$\operatorname{im}(ST) \subset \operatorname{im}(S).$$

Demostración. Sea $w \in \operatorname{im}(ST)$. Entonces por la definición de la imagen existe un vector $v \in V$ tal que $w = (ST)(v)$. Denotemos $T(v)$ por u. Entonces

$$w = (ST)(v) = S(T(v)) = S(u).$$

Hemos encontrado un vector $u \in V$ tal que $w = S(u)$. Con esto hemos demostrado que $w \in \operatorname{im}(S)$. $\square$

3. Proposición (las imágenes de las potencias de un operador forman una sucesión decreciente). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Entonces

$$\operatorname{im}(T^{k+1}) \subset \operatorname{im}(T^k).$$

Demostración. Como $T^{k+1} = T^k T$, esta proposición es un caso particular de la proposición anterior (los papeles de S y T hacen T^k y T, respectivamente). $\square$

4. Ejemplo. Calcular $\operatorname{im}(T^k)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, donde T es el operador lineal $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ asociado a la matriz

$$A = \operatorname{diag}(J_3(0), 0, 6).$$

5. Proposición (sobre la estabilización de las imágenes de las potencias de un operador). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que $\operatorname{im}(T^k) = \operatorname{im}(T^{k+1})$. Entonces $\operatorname{im}(T^{k+1}) = \operatorname{im}(T^{k+2})$.

Demostración. La contención $\operatorname{im}(T^{k+2}) \subset \operatorname{im}(T^{k+1})$ está demostrada en la proposición anterior. Falta demostrar que $\operatorname{im}(T^{k+1}) \subset \operatorname{im}(T^{k+2})$. Sea $w \in \operatorname{im}(T^{k+1})$. Por la definición de la imagen existe un vector $v \in V$ tal que $w = T^{k+1}(v)$. Denotemos $T^k(v)$ por u. Entonces $u \in \operatorname{im}(T^k)$. Por la hipótesis, $\operatorname{im}(T^k) = \operatorname{im}(T^{k+1})$, así que $u \in \operatorname{im}(T^{k+1})$. Por la definición de la imagen existe un vector $x \in V$ tal que $u = T^{k+1}(x)$. Ahora podemos representar w como

$$w = T^{k+1}(v) = T(T^k(v)) = T(u) = T(T^{k+1}(x)) = T^{k+2}(x).$$

Logramos encontrar un vector x tal que $w = T^{k+2}(x)$. Por la definición de la imagen esto significa que $w \in \operatorname{im}(T^{k+2})$. $\square$

6. Tarea adicional. Demostrar análogos de estas proposiciones para los núcleos.