Matriz identidad y su propiedad principal

Objetivos. Dar la definición de la matriz identidad y establecer su propiedad principal.

Requisitos. Notación para entradas de matrices, producto de matrices, la delta de Kronecker.

Definición del producto de matrices (repaso)

1. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & B_{1,5} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & B_{2,5} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} & B_{3,5} \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} & B_{4,5} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AB \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Escriba la fórmula para la entrada de AB que está en el segundo renglón y primera columna:

$$(AB)_{2,1} = \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad = \sum \qquad\qquad\qquad .$$

Escriba la fórmula para la entrada de AB con índices $(3,1)$:

$(AB)_{3,4} =$

Y otra más:

$(AB)_{1,2} =$

2. Definición general del producto de matrices.
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y sea $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Entonces

$$AB \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

La entrada de la matriz AB ubicada en la posición (i,j) se calcula por la fórmula

$$(AB)_{i,j} = \sum$$

donde

$$i \in \{1, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?}\}, \qquad j \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Delta de Kronecker y su propidad principal (repaso)

3. Definición de la de delta de Kronecker. Escriba la definición de la delta de Kronecker:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} \qquad , & \text{si } i = j; \\ \qquad , & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

4. Escriba todos los sumandos y simplifique el resultado:

$$\sum_{k=1}^{5} 2^k \delta_{k,4} =$$

5. Escriba todos los sumandos y simplifique el resultado:

$$\sum_{j=1}^{4} a_j \delta_{j,4} =$$

6. La propiedad principal de la delta de Kronecker. Sea $p \in \{1, \ldots, n\}$. Escriba la fórmula general:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{k,p} = \qquad .$$

Sugerencia: nótese que k es una *variable muda* y no puede aparecer en la respuesta.

7. Partir la suma en dos partes para demostrar la propiedad principal de la delta de Kronecker. Consideremos un caso particular: $n = 5$, $p = 2$. Representamos el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ como una unión disjunta de la siguiente manera:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2\} \cup \{ \quad , \quad , \quad , \quad \},$$

y partimos la suma de manera correspondiente. La primera parte tiene sólo un sumando (correspondiente a $k = 2$), y la segunda parte tiene $\underbrace{\qquad}_{?}$ sumandos:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k \delta_{k,2} = a_2 \delta_{2,2} + \sum_{k \in \{1,\ldots,5\} \setminus \{2\}} a_i \delta_{i,2}.$$

En cada parte calculamos la delta de Kronecker y simplificamos el resultado:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k \delta_{k,2} = a_2 \cdot \underbrace{\qquad}_{?} + \sum_{k \in \{1,\ldots,5\} \setminus \{2\}} a_i \cdot \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Diagonal principal de una matriz cuadrada

8. Diagonal principal, parte superior derecha y parte inferior izquierda de una matriz cuadrada (ejemplos). Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Las entradas sombreadas se llaman *entradas diagonales* de A. También se dice que estas entradas forman la *diagonal principal* de A.

Para cada una de las siguientes entradas de A determine su ubicación (dibuje las flechitas correspondientes):

$A_{1,3}$	está en la diagonal principal
$A_{4,2}$	está por arriba de la diagonal principal
$A_{3,3}$	está por debajo de la diagonal principal

9. Diagonal principal, parte superior derecha y parte inferior izquierda de una matriz cuadrada (definición formal). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Para cada una de las siguientes entradas de A determine su ubicación:

$A_{i,j},\ i < j$	está en la diagonal principal
$A_{i,j},\ i = j$	está por arriba de la diagonal principal
$A_{i,j},\ i > j$	está por debajo de la diagonal principal

Definición de la matriz identidad

10. Definición informal. La matriz identidad de orden n es una matriz cuadrada $n \times n$ que se define de la siguiente manera: sus entradas que están en la diagonal principal (*entradas diagonales*) son 1 y las demás entradas son 0. Vamos a denotar la matriz identidad de orden n por I_n o simplemente por I. Por ejemplo,

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escriba en forma explícita la matriz identidad de orden 4:

$$I_4 = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad \end{array}\right].$$

11. Escriba la fórmula para la (i, j)-ésima entrada de la matriz identidad:

$$(I_n)_{i,j} = \begin{cases} \quad , & \text{si} \qquad ; \\ \quad , & \text{si} \qquad . \end{cases}$$

12. Escriba la fórmula para la entrada (i, j) de la matriz identidad usando la delta de Kronecker:

$$(I_n)_{i,j} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

13. Dé la definición de la matriz identidad en forma $I_n = \left[\ ?\ \right]_{i,j=?}^{?}$, indicando bien la fórmula para la (i, j)-ésima entrada y los valores iniciales y finales de los índices i, j:

$$I_n = \left[\ \delta_{?,?}\ \right]_{i,j=?}^{?} = \left[\qquad\qquad\right]_{i,j=} \quad .$$

Propiedad principal de la matriz identidad (ejemplos)

14. Ejemplo. Calcule el siguiente producto, donde $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

$$I_3 A = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \quad + \quad + \quad & \quad + \quad + \quad \\ \hline & \\ \hline & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{bmatrix}.$$

Resumen:

$$I_3 A = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

15. Ejemplo. Calcule el siguiente producto, donde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \qquad & \qquad \\ \hline & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \end{bmatrix}.$$

Resumen:

$$AI_2 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Propiedad principal de la matriz identidad (enunciados y demostraciones formales)

16. Multiplicación por la matriz identidad del lado izquierdo. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces

$$I_m A = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

17. Demostración. Primero calculamos el tamaño del producto:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{I_m \in \qquad\qquad} \arrow[dr] & & \boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} \arrow[dl] \\
& \boxed{I_m A \in \qquad\qquad} &
\end{tikzcd}$$

Luego calculamos la (i,j)-ésima entrada del producto. Aplicamos la definición del producto y la definición de la matriz identidad:

$$(I_mA)_{i,j} = \sum_{k=} \underbrace{(I_m)\qquad}_{(I_m)_{?,?}} \underbrace{A\qquad}_{A_{?,?}} = \sum_{k=} \underbrace{\qquad\quad}_{?} \underbrace{A\qquad}_{A_{?,?}}$$

separamos un sumando que corresponde a $k = \underbrace{\qquad}_{?}$:

$$= \underbrace{\qquad\quad}\underbrace{\qquad\quad}_{A_{?,?}} + \sum_{k\in\{\qquad\quad\}\setminus\{\quad\}} \underbrace{\qquad\quad}_{?}\underbrace{\qquad\quad}_{A_{?,?}}$$

en cada caso calculamos la delta de Kronecker y y simplificamos el resultado:

$$= \underbrace{\qquad}_{?}\underbrace{\qquad\quad}_{?} + \sum_{k\in\{\qquad\quad\}\setminus\{\quad\}} \underbrace{\qquad}_{?}\underbrace{\qquad\quad}_{?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

18. Multiplicación por la matriz identidad del lado derecho. Enuncie y demuestre la propiedad que corresponde al título de este ejercicio.