La delta de Kronecker y la matriz identidad

Objetivos. Definir la delta de Kronecker y la matriz identidad, estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Multiplicación de matrices.

La delta de Kronecker

Definición (la delta de Kronecker). La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ definida mediante la regla

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

se llama el *símbolo de Kronecker* o la *delta de Kronecker*.

1. Ejemplos.

$$\delta_{2,5} = \delta_{5,2} = 0, \qquad \delta_{4,4} = 1, \qquad \delta_{-3,-3} = 1, \qquad \delta_{7,1} = \delta_{1,7} = 0.$$

2. Ejemplos. Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k \delta_{k,4}, \qquad \sum_{k=1}^{10} \frac{\delta_{7,k}}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{10} k^2 \delta_{k,12}, \qquad \sum_{k=1}^{10} \delta_{i,k}\delta_{k,j} \quad (1 \le i, j \le 10).$$

3. Propiedad principal de la delta de Kronecker. Sea S un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$ y sea $\{a_k\}_{k\in S}$ una familia de números. Si $i \in S$, entonces

$$\sum_{k\in S} a_k \delta_{k,i} = a_i.$$

Si $i \notin S$, entonces

$$\sum_{k\in S} a_k \delta_{k,i} = 0.$$

Demostración. Si $i \notin S$, entonces para todo $k \in S$ tenemos que $k \neq i$ y por lo tanto $\delta_{k,i} = 0$, así que todos los sumandos de la suma son cero.

Si $i \in S$, entonces partimos la suma en dos partes:

$$\sum_{k\in S} a_k \delta_{k,i} = \sum_{k\in\{i\}} a_k \delta_{k,i} + \sum_{k\in S\setminus\{i\}} a_k \delta_{k,i}.$$

La suma sobre $k \in \{i\}$ consiste en un solo sumando el cual es igual a

$$a_i \delta_{i,i} = a_i.$$

En la suma sobre $k \in S \setminus \{i\}$ tenemos que $\delta_{k,i} \neq 0$ y por lo tanto tos sumandos son cero. $\square$

La matriz identidad

Definición (la matriz identidad). La *matriz identidad de tamaño* n denotada por I_n o simplemente por I es la matriz cuadrada de tamaño n con entradas

$$I_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Es decir, todos los elementos diagonales de la matriz identidad son iguales a 1, y todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a 0.

4. Ejemplos.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Producto de una matriz por la matriz identidad, ejemplos. Calculemos los siguientes productos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Proposición (la matriz identidad es un elemento neutro con respecto a la multiplicación). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Entonces

$$AI_n = A, \qquad I_m A = A.$$

Demostración. Demostremos sólo la fórmula $AI_n = A$. Los tamaños de la matriz AI_n es $m \times n$, los mismos que los de la matriz A. Calculemos la (i, j)-ésima entrada del producto AI_n:

$$(AI_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(I_n)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\delta_{k,j} = \sum_{k\in\{j\}} A_{i,k} \underbrace{\delta_{k,j}}_{=1} + \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\}} A_{i,k} \underbrace{\delta_{k,j}}_{=0} = A_{i,j}. \quad \square$$

7. Ejercicio. Demostrar la igualdad $I_m A = A$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ es una matriz arbitraria.

8. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una *matriz escalar*, esto es, $A = \lambda I_n$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que A conmuta con todas las matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

Ejercicios adicionales

9. Tarea adicional. En este ejercicio consideremos matrices $n \times n$ y denotemos por $E_{p,q}$ a la matriz cuya (p, q)-ésima entrada es 1 y todas las demás son 0:

$$E_{p,q} = \left[\delta_{p,i}\delta_{q,j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule los productos $AE_{p,q}$ y $E_{p,q}A$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Primero puede considerar ejemplos, luego formular los resultados en el caso general.

10. Sea $n \in \{1, 2, \ldots\}$ un número fijo y sean $E_{p,q}$ las mismas matrices que en el ejercicio anterior. Calcule el producto $E_{p,q}E_{r,s}$, donde $p, q, r, s \in \{1, \ldots, n\}$.

11. Tarea adicional (teorema de Schur). Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ conmuta con todas las matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que A es una matriz *escalar*, esto es, $A = \lambda I_n$ para algún escalar λ.