Definición del máximo común divisor (ejercicios)

1. Pasar de una desigualdad con valor absoluto a una desigualdad doble (repaso). Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $|a| \leqslant 8$. Demuestre que

$$-8 \leqslant a \leqslant 8.$$

Sugerencia: usar las desigualdades $a \leqslant |a|$ y $-|a| \leqslant a$.

2. Comparación de los valores absolutos de dos números, si uno divide al otro (repaso). Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \mid (-8)$. Demuestre que

$$|a| \leqslant 8.$$

3. Haga una conclusión de los dos ejercicios anteriores.

4. ¿Cuántos números enteros x satisfacen las desigualdades $-8 \leqslant x \leqslant 8$? En particular, nótese que es un conjunto finito.

5. El conjunto de divisores enteros de un número entero (definición). Sea $m \in \mathbb{Z}$. Recuerde la definición del conjunto $\mathcal{D}(m)$:

$$\mathcal{D}(m) := \big\{x \in \mathbb{Z}\colon \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\big\}.$$

6. El conjunto de divisores enteros de un número entero no nulo es finito (ejemplo). Escriba la definición del conjunto $\mathcal{D}(-8)$:

$$\mathcal{D}(-8) =$$

Sin calcular este conjunto, explique por qué está contenido en $\{-8, -7, \ldots, 7, 8\}$ y por lo tanto es finito.

Divisores comunes de dos números enteros

7. Recuerde que el conjunto de los divisores comunes de dos números enteros a y b se puede definir al aplicar una operación a los conjuntos $\mathcal{D}(a)$ y $\mathcal{D}(b)$. Recuerde cuál operación se aplica, unión ($\cup$) o intersección ($\cap$):

$$\{x \in \mathbb{Z}\colon \quad (x \mid a) \quad \wedge \quad (x \mid b)\} = \mathcal{D}(a) \underbrace{\qquad}_{?} \mathcal{D}(b).$$

8. Sean a y b dos números enteros. Encuentre algún número entero que es su común divisor. Con esto demostrará que el conjunto de los divisores comunes de a y b es no vacío.

9. Compare los siguientes dos conjuntos (ponga $\subseteq$ o $\supseteq$):

$$\{x \in \mathbb{Z}\colon \quad (x \mid a) \quad \wedge \quad (x \mid b)\} \underbrace{\qquad}_{?} \mathcal{D}(a).$$

Compare los siguientes dos conjuntos (ponga $\subseteq$ o $\supseteq$):

$$\{x \in \mathbb{Z}\colon \quad (x \mid a) \quad \wedge \quad (x \mid b)\} \underbrace{\qquad}_{?} \mathcal{D}(a).$$

10. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Demuestre que el conjunto de sus divisores comunes es finito.

Demostración. El conjunto de los divisores comunes de a y b se puede escribir como

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{?} \underbrace{\qquad}_{\cup \text{ ó } \cap} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Si $a \neq 0$, entonces el conjunto $\mathcal{D}(a)$ está contenido en

$$\{x \in \mathbb{Z}\colon \quad \underbrace{\qquad}_{?} \leqslant x \leqslant \underbrace{\qquad}_{?}\}$$

y por lo tanto es finito. Ahora de la contención $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) \subseteq \mathcal{D}(a)$ concluimos que el conjunto $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$ es finito.

Se recomienda considerar el otro caso de manera análoga. En ambos casos, el conjunto $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$ es finito. □

11. Definición del máximo común divisor de dos conjuntos no ambos cero. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \neq 0$ o $b \neq 0$. El *máximo común divisor* de a y b se define como el elemento máximo del conjunto $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

Se sabe que cada subconjunto finito y no vacío de $\mathbb{Z}$ tiene un único elemento máximo. Como ya hemos visto que este conjunto es finito y no vacío, la definición es correcta.