Cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo a través de la descomposición en primos

1. Ejemplo. Sean
$$a = 63, \qquad b = 294.$$
Notamos que
$$a = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7^1, \qquad b = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^2.$$
Escribimos a y b como productos de potencias de los mismos primos:
$$a = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^1, \qquad b = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^2.$$
Por eso
$$d = \operatorname{mcd}(a, b) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 21, \qquad m = \operatorname{mcm}(a, b) = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 882.$$
Comprobación que $dm = ab$:
$$dm = 18522, \qquad ab = 18522.$$
Como otra comprobación, calculemos $\operatorname{mcd}(a, b)$ con el algoritmo de Euclides:
$$\operatorname{mcd}(63, 294) = \operatorname{mcd}(294, 63) = \operatorname{mcd}(63, 42) = \operatorname{mcd}(42, 21) = \operatorname{mcd}(21, 0) = 21.$$

2. Regla general. Si
$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}, \qquad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m},$$
donde $\alpha_j, \beta_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, entonces
$$\operatorname{mcd}(a, b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_m^{\gamma_m}, \qquad \operatorname{mcm}(a, b) = p_1^{\eta_1} p_2^{\eta_2} \cdots p_m^{\eta_m},$$
donde
$$\gamma_j = \min(\alpha_j, \beta_j), \qquad \eta_j = \max(\alpha_j, \beta_j).$$