Descripción con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas del subespacio generado por algunos vectores de $\mathbb{R}^4$

Objetivos. Dados algunos vectores $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, vamos a encontrar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto solución sea $\ell(a_1, \ldots, a_m)$.

Requisitos. Análisis de sistemas de ecuaciones lineales, solución de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros, espacio generado por un conjunto de vectores.

1. Ejemplo. Están dados tres vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Denotemos por S al subespacio generado por a_1, a_2, a_3. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. En otras palabras, determinar qué condiciones deben cumplir las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 de un vector $x \in \mathbb{R}^4$ para que x pertenezca a S.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Un vector $x \in \mathbb{R}^4$ pertene a S si y sólo si existen algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x.$$

La última igualdad se puede escribir como el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & x_1; \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = & x_3; \\ 2\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & 7\lambda_3 & = & x_4; \\ 3\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x_2. \end{array} \right.$$

Aquí $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son incógnitas del sistema, y las componentes x_1, x_2, x_3, x_4 de x son parámetros del sistema. Escribimos el sistema en forma matricial. Aplicando operaciones elementales por renglones a la matriz aumentada transformamos la matriz del sistema en una matriz pseudoescalonada.

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & 3 & x_1 \\ -1 & 2 & -4 & x_2 \\ 2 & -3 & 7 & x_3 \\ 3 & 4 & 2 & x_4 \end{array} \right] \xrightarrow[R_4 += -4R_1]{\substack{R_2 += -2R_1 \\ R_3 += 3R_1}} \left[\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & 3 & x_1 \\ -5 & 0 & -10 & -2x_1 + x_2 \\ 8 & 0 & 16 & 3x_1 + x_3 \\ -5 & 0 & -10 & -4x_1 + x_4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 *= 5}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & 3 & x_1 \\ -5 & 0 & -10 & -2x_1 + x_2 \\ 40 & 0 & 80 & 15x_1 + 5x_3 \\ -5 & 0 & -10 & -4x_1 + x_4 \end{array} \right] \xrightarrow[R_4 += -R_2]{R_3 += 8R_2} \left[\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & 3 & x_1 \\ -5 & 0 & -10 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_1 - x_2 + x_4 \end{array} \right].$$

La última matriz del sistema es pseudoescalonada. El sistema es consistente si, y sólo si, se anulan los lados derechos de las dos últimas ecuaciones. Respuesta:

$$x \in S \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 8x_2 & - & 5x_3 & & & = & 0; \\ 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

Otra forma de la misma respuesta:

$$S = \big\{ x \in \mathbb{R}^4 \colon \quad x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0 \quad \wedge \quad 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \big\}.$$

Comprobemos que a_1, a_2, a_3 satisfacen al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 \in S \colon \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2 + 8 - 10 + 0 & = & 0; \quad \checkmark \\ 4 - 1 + 0 - 3 & = & 0; \quad \checkmark \end{array} \right.$$

$$a_2 \in S \colon \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 1 - 16 + 15 + 0 & = & 0; \quad \checkmark \\ 2 + 2 + 0 - 4 & = & 0; \quad \checkmark \end{array} \right.$$

$$a_3 \in S \colon \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 3 + 32 - 35 + 0 & = & 0; \quad \checkmark \\ 6 - 4 + 0 - 2 & = & 0. \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Otra forma de escribir la comprobación:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} 2 + 8 - 10 + 0 & 1 - 16 + 15 + 0 & 3 + 32 - 35 + 0 \\ \hline 4 - 1 + 0 - 3 & 2 + 2 + 0 - 4 & 6 - 4 + 0 - 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$