# Propiedades extremales de bases

**Objetivos.** Mostrar que las bases de un espacio vectorial son las listas linealmente independientes máximas (por contención y por tamaño), y al mismo tiempo son las listas generadores mínimas (por contención y por tamaño).

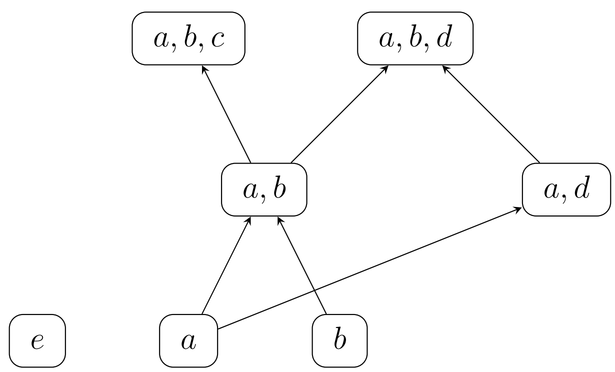
**Requisitos.** Conjunto generador, lista linealmente independiente de vectores .

## Dos modos de comparar conjuntos: por contención y por tamaño

**1. Ejemplo.** Dibujemos “la gráfica de contenciones de los conjuntos

$$\{a\}, \quad \{b\}, \quad \{a,b\}, \quad \{a,d\}, \quad \{a,b,c\}, \quad \{e\}.$$

Los subconjuntos son nodos de la gráfica, y las contenciones son aristas (no indicamos las contenciones que se pueden obtener por transitividad):




Los conjuntos $\{a,b,c\}$ y $\{a,b,d\}$ son *máximos por tamaño*, porque no hay conjuntos más grandes por tamaño. Los conjuntos $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$ y $\{e\}$ son *máximos por contención* porque no hay conjuntos que los contengan como subconjuntos propios.

**2. Definición (conjunto máximo por tamaño).** Sean $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos y $A \in \mathcal{S}$. Se dice que $A$ es el *elemento máximo de $\mathcal{S}$ por tamaño* si no existe $B \in \mathcal{S}$ tal que $|A| < |B|$.

**3. Definición (conjunto máximo por contención).** Sean $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos y $A \in \mathcal{S}$. Se dice que $A$ es el *elemento máximo de $\mathcal{S}$ por inclusión* si no existe $B \in \mathcal{S}$ tal que $A \subset B$ (subconjunto propio).

## Bases como listas linealmente independientes máximas

**4. Proposición (bases son listas linealmente independientes máximas).** Sea $V$ un EV/$\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ un sistema de vectores en $V$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{B}$ es linealmente y genera $V$;

(b) $\mathcal{B}$ es máximo por tamaño entre todos los sistemas linealmente independientes de $V$.

(c) $\mathcal{B}$ es máximo por inclusión entre todos los sistemas linealmente independientes de $V$;

*Demostración.* (a)$\Rightarrow$(b). Se supone que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\ell(\mathcal{B}) = V$. Sea $\mathcal{A}$ un sistema linealmente independiente. Tenemos por demostrar que $|\mathcal{B}| \geq |\mathcal{A}|$. Pero esta desigualdad se obtiene del teorema principal sobre la dependencia lineal, porque $\mathcal{A} \subset \ell(\mathcal{B})$ y $\mathcal{A}$ es linealmente independiente.

(b)$\Rightarrow$(c). Se supone que el sistema $\mathcal{B}$ es máximo por tamaño entre todos los sistemas linealmente independientes de $V$. Mostremos que $\mathcal{B}$ es máximo por inclusión. Supongamos que $\mathcal{A}$ un sistema linealmente independiente que contiene a $\mathcal{B}$ como un subsistema propio. Cambiando el orden de vectores en $\mathcal{A}$, podemos suponer que $\mathcal{A} = (b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$. Entonces $|\mathcal{A}| = n + 1 > |\mathcal{B}|$. Una contradicción, porque $\mathcal{B}$ es máximo por tamaño entre los sistemas linealmente independientes.

(c)$\Rightarrow$(a). Se supone que el sistema $\mathcal{B}$ es máximo por inclusión entre todos los sistemas linealmente independientes de $V$. Tenemos por demostrar que $\ell(\mathcal{B}) = V$. Sea $v \in V$. Consideremos el sistema $\mathcal{A} = (b_1, \ldots, b_n, v)$. Notemos que $\mathcal{A}$ contiene a $\mathcal{B}$ como un subsistema propio, y $\mathcal{B}$ es máximo por inclusión entre todos los sistemas linealmente independientes de $V$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente.

Tenemos la siguiente situación: el sistema $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente, y el sistema $(b_1, \ldots, b_n, v)$ es linealmente dependiente. Por una de las propiedades de sistemas linealmente independientes, esto significa que $v \in \ell(b_1, \ldots, b_n)$. □

## Bases como listas generadores mínimas

**5. Proposición (bases son listas generadores mínimos).** Sea $V$ un EV/$\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una lista de vectores en $V$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{B}$ es linealmente y genera $V$;

(b) $\mathcal{B}$ es mínima por tamaño entre todas las listas generadores de $V$.

(c) $\mathcal{B}$ es mínima por contención entre todas las listas generadores de $V$;

**6. Ejercicio.** Demuestre la proposición.