Multiplicación de matrices

problemas experimentales

Hacer matemáticas significa resolver problemas de cierto tipo. Lo más divertido es resolver problemas cuando uno no tiene recetas para hacerlo. Se recomienda intentar a resolver los siguientes problemas inmediatamente después de aprender a multiplicar las matrices.

¿Para qué sirve la multiplicación de matrices?

1. Las matrices son tablas de coeficientes de transformaciones lineales, y el producto de dos matrices corresponde a la composición de dos transformaciones. Para entender la última frase, se recomienda calcular el producto

$$A(Bx)$$

y luego construir una matriz C tal que

$$A(Bx) = Cx.$$

Se recomienda trabajar con A, B, x generales, pero de tamaños pequeños:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Experimentos numéricos

2. Hay varios lenguajes de programación especialmente orientados a cálculos con matrices, por ejemplo, MATLAB y sus análogos libres GNU Octave, Scilab y FreeMat. En algunos de los siguientes problemas los cálculos simbólicos en papel se pueden complementar con experimentos numéricos. Para empezar, se recomienda instalar uno de los sistemas mencionados y ejecutar los siguientes comandos:

```
A = [3 -7 5; 1 2 4]

B = [7 -1; 2 3]

A * B

A(1, 3)

A(2, :)
```

Propiedades raras de la multiplicación de matrices

3. Encontrar una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ distinta de la matriz nula $\mathbf{0}_{2\times 2}$, pero cuyo cuadrado $A^2 = AA$ sea la matriz nula. En otras palabras, encontrar una matriz A tal que no todas las entradas de A sean cero, pero que todas las entradas de A^2 sean cero.

4. Encontrar una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que todas las entradas de A son distintas de cero, pero $A^2 = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

El comportamiento de los renglones y columnas del producto de dos matrices

5. Consideremos el producto de dos matrices A y B (se recomienda calcular AB):

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix}.$$

¿Cómo se cambia el producto AB, si multiplicamos el primer renglón de la matriz A por un número λ?

$$\begin{bmatrix} \lambda A_{1,1} & \lambda A_{1,2} & \lambda A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix}.$$

6. ¿Qué hacer con A y B (puede ser suficiente cambiar solamente una de estas matrices), para que en la matriz AB la segunda columna se multiplique por un número μ?

7. ¿Qué hacer con A y B, para que el primer renglón de AB se intercambie con el segundo?

8. ¿Qué hacer con A y B, para que en el producto AB la primera columna se intercambie con la tercera?

Matrices diagonales

9. Las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

se llaman *matrices diagonales*. Vamos a trabajar solamente con matrices diagonales cuadradas ($n \times n$), aunque matrices diagonales rectangulares también son útiles.

- ¿Cómo multiplicar una matriz diagonal por un vector columna?
- ¿Cómo hacer operaciones con matrices diagonales del mismo tamaño?

Extraer una parte de la matriz usando solamente la multiplicación

10. Multiplicar una matriz general A (elegir su tamaño de manera adecuada) por un vector de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11. Encontrar un vector x tal que el producto Ax coincida con la tercera columna de A.

12. En los problemas anteriores extraemos de la matriz A una columna usando la multiplicación de matrices. ¿Cómo extraer un renglón?

13. ¿Cómo extraer de la matriz A sus columnas 2 y 4?

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix} \qquad ? \qquad = \begin{bmatrix} A_{1,2} & A_{1,4} \\ A_{2,2} & A_{2,4} \\ A_{3,2} & A_{3,4} \end{bmatrix}$$

14. Extraer de la matriz A su entrada $(2,3)$ utilizando solamente la multiplicación de matrices.

15. Utilizando solamente la multiplicación de matrices extraer de la matriz A su submatriz ubicada en la intersección de los renglones $1, 3$ con las columnas $1, 4$:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix}$$