Función exponencial de una matriz

Objetivos. Definir la función exponencial para matrices cuadradas.

Aplicaciones. Grupos y álgebras de Lie. Análisis de ecuaciones diferenciales.

Requisitos. Serie de Taylor–Maclaurin de la función exponencial.

1. Definición (límite de una sucesión de matrices). Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de matrices, $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, y sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se dice que la sucesión $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ tiene límite B cuando k tiende a infinito si para todo par de índices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ la (i, j)-ésima entrada de A_k tiene límite $B_{i,j}$ cuando $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad \lim_{k\to\infty} (A_k)_{i,j} = B_{i,j}.$$

En otras palabras, el límite de matrices se define *entrada por entrada*.

2. Propiedades aritméticas del límite. Si

$$\lim_{k\to\infty} A_k = C, \qquad \lim_{k\to\infty} B_k = D,$$

entonces:

- $\lim\limits_{k\to\infty} (A_k + B_k) = C + D$;
- $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda A_k) = \lambda C$;
- $\lim\limits_{k\to\infty} (A_k B_k) = CD$.

3. Definición (convergencia y suma de una serie). Se dice que una serie de matrices $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ es *convergente* y su suma es igual a B si

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} A_k = B.$$

4. Definición (exponencial de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Convergencia de la serie que define la exponencial de una matriz

5. Definición (norma de Frobenius o sea norma de Hilbert–Schmidt). Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, su *norma de Frobenius* (también llamada *norma de Hilbert–Schmidt*) se define mediante la siguiente fórmula:

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

6. Tarea adicional (norma de Frobenius). Demuestre que la función $\|\cdot\|_F$ es una norma en el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que $\|\cdot\|_F$ cumple con la propiedad submultiplicativa:

$$\|AB\|_F \le \|A\|_F \|B\|_F \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Indicación: para acotar $(AB)_{i,j}$ aplique la desigualdad de Cauchy–Schwarz.

7. Tarea adicional (teorema de Weierstrass para la convergencia de series de matrices). Sea $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ una serie de matrices, $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supongamos que la serie numérica de sus normas de Frobenious converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|_F < +\infty.$$

Demuestre que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ converge. Indicación: use el criterio de Cauchy.

8. Tarea adicional (convergencia de la serie que define la exponencial de una matriz). Demuestre que para toda $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$ converge. Indicación: use el teorema de Weierstrass.

Propiedad principal de la función exponencial

9. Tarea adicional (propiedad principal de la función exponencial). Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $AB = BA$. Demuestre que

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B).$$

10. Ejercicio (exponencial de la matriz nula). Calcule $\exp(\mathbf{0}_{0,0})$.

11. Ejercicio (invertibilidad de la exponencial de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que

$$\exp(A)\exp(-A) = I_n, \qquad \exp(-A)\exp(A) = I_n.$$

Estas igualdades significan que la matriz $\exp(A)$ es invertible y su inversa es $\exp(-A)$.