

Cálculo de la función exponencial de una matriz diagonalizable

Objetivos. Aprender a calcular la función exponencial de matrices diagonales y diagonalizables.

Requisitos. Matrices diagonalizables, definición de la función exponencial de una matriz.

1. Definición (exponenciación de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Exponencial de matrices diagonales y diagonalizables

2. Polinomio de una matriz diagonal. Sean $A = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, donde $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F}$, y $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Entonces

$$f(A) = \text{diag}(f(\mu_1), \dots, f(\mu_n)).$$

3. Función exponencial de una matriz diagonal. Sea A una matriz diagonal:

$$A = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

donde $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\exp(A) = \text{diag}(\exp(\mu_1), \dots, \exp(\mu_n)).$$

4. Polinomio de una matriz diagonalizable. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz diagonalizable:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

donde $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es una matriz invertible y $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F}$, y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Entonces

$$f(A) = P \text{diag}(f(\mu_1), \dots, f(\mu_n))P^{-1}.$$

5. Exponencial de una matriz diagonalizable. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable:

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n),$$

donde $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz invertible y $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$, Entonces

$$\exp(A) = P \text{diag}(\exp(\mu_1), \dots, \exp(\mu_n))P^{-1}.$$

6. Ejemplo. Calcular $\exp(A)$ si

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

7. Ejemplo. Dada la matriz A , calcular $\exp(A)$. Se sabe que $\text{sp}(A) = \{-1, 0, 4\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

8. Ejercicio. Calcule $\exp(A)$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$