Cálculo de la función exponencial de un bloque de Jordan

Objetivos. Aprender a calcular la función exponencial de un bloque de Jordan.

Requisitos. Definición de la función exponencial de una matriz, potencias de un bloque de Jordan.

1. Definición (exponencial de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Exponencial de un bloque de Jordan

Vamos a calcular $\exp(tJ_2(\lambda))$.

2. Potencias de un bloque de Jordan (repaso). Recordamos que

$$(J_2(\lambda))^p = \begin{bmatrix} \lambda^p & p\lambda^{p-1} \\ 0 & \lambda^p \end{bmatrix}.$$

3. Función exponencial de $\boldsymbol{tJ_2(\lambda)}$. Sean $t, \lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\exp\left(tJ_2(\lambda)\right) = \begin{bmatrix} \exp(t\lambda) & t\exp(t\lambda) \\ 0 & \exp(t\lambda) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Calculamos la suma parcial de la serie que define exp:

$$\sum_{p=0}^{m} \frac{1}{p!}\left(tJ_2(\lambda)\right)^p = \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{p!} t^p \left(J_2(\lambda)\right)^p = \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{p!} t^p \begin{bmatrix} \lambda^p & p\lambda^{p-1} \\ 0 & \lambda^p \end{bmatrix}.$$

Las entradas diagonales de esta matriz son iguales a

$$\sum_{p=0}^{m} \frac{t^p \lambda^p}{p!},$$

y el límite cuando $m \to \infty$ es $\exp(t\lambda)$.

Calculemos la entrada $(1,2)$:

$$\sum_{p=0}^{m} \frac{pt^p\lambda^{p-1}}{p!} = \sum_{p=1}^{m} \frac{pt^p\lambda^{p-1}}{p!} = t\sum_{p=1}^{m} \frac{t^{p-1}\lambda^{p-1}}{(p-1)!} = t\sum_{q=0}^{m-1} \frac{t^q\lambda^q}{q!}.$$

El límite cuando $m \to \infty$ es $t\exp(t\lambda)$. $\square$

4. Otra demostración. Denotemos por f_m la m-ésima suma parcial de la serie que define exp:

$$f_m(z) \coloneqq \sum_{p=0}^{m} \frac{z^p}{p!}.$$

Luego definimos el polinomio g_m como

$$g_m(z) \coloneqq f_m(tz).$$

Entonces $g_m'(z) = t f_m'(tz)$ y

$$f_m(tJ_2(\lambda)) = g_m\left(J_2(\lambda)\right) = \begin{bmatrix} g_m(\lambda) & g_m'(\lambda) \\ 0 & g_m(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_m(t\lambda) & t f_m'(t\lambda) \\ 0 & f_m(t\lambda) \end{bmatrix}.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$ y tomando en cuenta que

$$f_m(z) \to \exp(z), \qquad f_m'(z) \to \exp(z),$$

obtenemos la fórmula requerida.

5. Ejemplo.

$$\exp\left(tJ_2(5)\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{5t} & t\,\mathrm{e}^{5t} \\ 0 & \mathrm{e}^{5t} \end{bmatrix}.$$

6. Exponencial de $tJ_3(\lambda)$. De manera similar a lo anterior se puede demostrar que

$$\exp\left(tJ_3(\lambda)\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda} & t\,\mathrm{e}^{t\lambda} & t^2\,\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} & t\,\mathrm{e}^{t\lambda} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t\lambda} \end{bmatrix}.$$

7. Exponencial de una matriz de Jordan. Si

$$G = \operatorname{diag}\big(J_{k_1}(d_1), J_{k_2}(d_2), \ldots, J_{k_m}(d_m)\big),$$

entonces

$$\exp(G) = \operatorname{diag}\big(\exp(J_{k_1}(d_1)), \exp(J_{k_2}(d_2)), \ldots, \exp(J_{k_m}(d_m))\big).$$

8. Exponencial de una matriz compleja arbitraria. Para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $G \coloneqq P^{-1}AP$ es una matriz de Jordan. Si se saben G y P, entonces $\exp(tA)$ se puede calcular como

$$\exp(tA) = P\exp(tG)P^{-1}.$$