Ejemplos de construcción de bases de Jordan de matrices cuadradas de orden 3

Objetivos. Por medio de ejemplos aprender a construir bases de Jordan de matrices no diagonalizables de orden 3.

Requisitos. Cálculo de valores y vectores propios.

1. Ejemplo con dos valores propios. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -2 & -9 & 6 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primero calculamos el polinomio característico y el espectro de la matriz A (están omitidos los cálculos):

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = (\lambda+3)^2(\lambda+1), \qquad \mathrm{sp}(A) = \{-3, -1\}.$$

Encontremos una base del subespacio propio $S_{A,-3} = \ker(A + 3I_3)$:

$$A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \\ -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base del subespacio propio $S_{A,-3}$ está formada por el vector propio

$$u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La multiplicidad geométrica no coincide con la algebraica ($1 < 2$), por eso la matriz A no es diagonalizable. La forma canónica de Jordan J de la matriz A tendrá entradas diagonales $-3, -3, -1$, pero al valor propio -3 le corresponde sólo un vector propio. Por eso

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(J_2(-3), J_1(-1)).$$

El vector u_2 de la base de Jordan debe satisfacer la ecuación

$$Au_2 = u_1 - 3u_2.$$

Resolvamos el sistema $(A + 3I_3)u_2 = u_1$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & -3 \\ -2 & -6 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución particular es (con $x_3 = 1$)

$$u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Falta encontrar una base del subespacio propio $S_{A,-1} = \ker(A + I_3)$:

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & -8 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base del subespacio propio $S_{A,-1}$ está formada por el vector propio

$$u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hemos encontrado una base de Jordan $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$. La matriz de cambio es

$$P = P_{\mathcal{E},\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hagamos la comprobación $AP = PJ$. Por un lado,

$$PJ = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3-6 & 1 \\ -6 & 2+0 & -1 \\ -3 & 1-3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -2 & -9 & 6 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+8-5 & -4+0-5 & 2+4-5 \\ 6-18+6 & -4+0+6 & 2-9+6 \\ 9-16+4 & -6+0+4 & 3-8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Al saber la forma canónica de Jordan $J = \operatorname{diag}(J_2(-3), J_1(1))$ de la matriz A, es fácil construir su polinomio mínimo:

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda + 3)^2(\lambda + 1).$$

Aquí la potencia 2 es el orden máximo de los bloques de Jordan con entrada diagonal -3, y la potencia 1 el el orden máximo de los bloques de Jordan con entrada diagonal -1,

2. Ejemplo con un valor propio y multiplicidad geométrica 1. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico y el espectro de la matriz A (están omitidos los cálculos):

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3, \qquad \mathrm{sp}(A) = \{2\}.$$

Encontremos una base del subespacio propio $S_{A,2} = \ker(A - 2I_3)$:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una base del subespacio propio $S_{A,2}$ está formada por el vector

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

La multiplicidad geométrica del valor propio 2 es menor que su multiplicidad algebraica $(1 < 3)$, por eso A no es diagonalizable. En la forma canónica de Jordan de la matriz A todas las entradas diagonales son 2, pero sólo una columna corresponde a aún vector propio. Las demás dos columnas corresponden a vectores propios generalizados y por eso tienen 1 por arriba de la diagonal principal:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J_3(2).$$

Si $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ es una base de Jordan de A, sus elementos deben satisfacer las igualdades

$$Au_1 = 2u_1, \qquad Au_2 = u_1 + 2u_2, \qquad Au_3 = u_2 + 2u_3.$$

Buscamos un vector u_2 que satisfaga la ecuación $(A - 2I_3)u_2 = u_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución particular es (con $x_1 = 0$)

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Buscamos un vector u_3 que satisfaga la ecuación $(A - 2I_3)u_3 = u_2$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución particular es (con $x_1 = 0$)

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hemos encontrado una base de Jordan $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$. La matriz de cambio es

$$P = P_{\mathcal{E},\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hagamos la comprobación $AP = PJ$. Por un lado,

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4-2+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 6+0-2 & 0+0+0 & 0+0-1 \\ -4+4-4 & 0-2+0 & 0+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} PJ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 4+0+0 & 2-2+0 & 0-1+0 \\ -4+0+0 & -2+0+0 & 0+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

El polinomio mínimo es

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3.$$

La potencia 3 corresponde al orden máximo entre los bloques de Jordan con entrada diagonal 2 (en este ejemplo J está formada por un bloque).