Ejemplos de cómputo de la forma canónica de Jordan a través de los rangos de ciertas potencias

Objetivos. Dada una matriz A, aprender a calcular su forma canónica de Jordan por medio de los rangos de las matrices $(\lambda I_n - A)^p$, donde $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$.

Requisitos. Espectro de una matriz, rango de una matriz.

1. Base teórica. Se sabe que para cada matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ existe una matriz invertible P tal que el producto $J = P^{-1}AP$ es una matriz de Jordan. En otras palabras, J es una matriz diagonal por bloques, y sus bloques son bloques de Jordan. En esta situación las entradas diagonales de J deben ser valores propios de A, y el número de los bloques $J_k(\lambda_0)$ en la matriz J se calcula por la fórmula

$$k = \operatorname{r}((\lambda_0 I_n - A)^{k-1}) - 2\operatorname{r}((\lambda_0 I_n - A)^k) + \operatorname{r}((\lambda_0 I_n - A)^{k+1}). \qquad (1)$$

En particular, esto significa que la matriz J se determina de manera única, salvo el orden de los bloques. La matriz J se llama la *forma canónica de Jordan* de la matriz A.

2. Rangos de potencias de una matriz. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se sabe que si para algún número $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ se cumple la igualdad $\operatorname{r}(B^{p+1}) = \operatorname{r}(B^p)$, entonces $\operatorname{r}(B^q) = \operatorname{r}(B^p)$ para cualquier $q \geq p$. En otras palabras, los rangos $\operatorname{r}(B^q)$ estrictamente decrecen hasta cierto p y después de p son constantes.

3. Cálculos en MATLAB/Scilab/GNU Octave/FreeMat. Para la matriz del Ejemplo 4 se pueden hacer los siguientes cálculos en GNU Octave:

```
A = [8 4 7 2; 4 4 5 2; -6 -3 -5 -3; 6 -1 7 7]
eig(A)
B = A - 3 * eye(4)
rank(B)
B^2
rank(B^2)
B^3
rank(B^3)
C = A - 4 * eye(4)
rank(C)
C^2
rank(C^2)
```

4. Ejemplo. Para facilitar los cálculos, ya está dado el espectro de A:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 2 \\ -6 & -3 & -5 & -3 \\ 6 & -1 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{sp}(A) = \{3, 4\}.$$

Formamos la matriz $B = A - 3I_4$ y calculamos los rangos de sus potencias (los cálculos están hechos en GNU Octave):

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ -6 & -3 & -8 & -3 \\ 6 & -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{r}(B^0) = 4, \qquad \mathrm{r}(B^1) = 3.$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 13 & 5 \\ 6 & 0 & 7 & 3 \\ -12 & 0 & -14 & -6 \\ 8 & -2 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{r}(B^2) = 2.$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 13 & 5 \\ 6 & 0 & 7 & 3 \\ -12 & 0 & -14 & -6 \\ 8 & -2 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{r}(B^3) = 2.$$

Aplicamos la fórmula (1):

$$\begin{aligned}
k_1 &= \mathrm{r}(B^0) - 2\,\mathrm{r}(B^1) + \mathrm{r}(B^2) = 4 - 6 + 2 = 0; \\
k_2 &= \mathrm{r}(B^1) - 2\,\mathrm{r}(B^2) + \mathrm{r}(B^3) = 3 - 4 + 2 = 1; \\
k_3 &= \mathrm{r}(B^2) - 2\,\mathrm{r}(B^3) + \mathrm{r}(B^4) = 2 - 4 + 2 = 0; \\
k_4 &= \mathrm{r}(B^3) - 2\,\mathrm{r}(B^4) + \mathrm{r}(B^5) = 2 - 4 + 2 = 0; \\
&\ldots
\end{aligned}$$

La forma canónica de Jordan de la matriz A tiene sólo un bloque con entrada diagonal 3, a saber, $J_2(3)$.

Ahora formamos la matriz $C = A - 4I_4$ y calculamos los rangos de sus potencias:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ -6 & -3 & -9 & -3 \\ 6 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{r}(C^0) = 4, \qquad \mathrm{r}(C^1) = 2.$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{r}(C^2) = 2.$$

Aplicamos la fórmula (1):

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \mathrm{r}(C^0) - 2\,\mathrm{r}(C^1) + \mathrm{r}(C^2) = 4 - 4 + 2 = 2;\\
k_2 &= \mathrm{r}(C^1) - 2\,\mathrm{r}(C^2) + \mathrm{r}(C^3) = 2 - 4 + 2 = 0;\\
&\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

Esto significa que la forma canónica de Jordan de la matriz A tiene dos bloques con entrada diagonal 4; a saber, se repite dos veces el bloque $J_1(4)$. Respuesta:

$$
J = \operatorname{diag}(J_2(3), J_1(4), J_1(4)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.
$$

El polinomio mínimo es

$$
\mu_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4).
$$

Aquí la potencia 2 es el orden máximo entre los bloques $J_p(3)$ en la matriz J, y la potencia 1 es el orden máximo entre los bloques $J_1(4)$ en la matriz J.