Ejemplo de construcción de una base de Jordan de una matriz cuadrada de orden 2

Objetivos. Dada una matriz no diagonalizable de orden 2, vamos a construir su forma canónica de Jordan, una base de Jordan, el polinomio mínimo y la función exponencial $f(t) = \exp(tA)$.

Requisitos. Cálculo de valores y vectores propios; función exponencial.

1. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -25 & 13 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

y el espectro de esta matriz es unipuntual:

$$\operatorname{sp}(A) = \{3\}.$$

La multiplicidad algebraica del valor propio 3 es igual a 2. Hallemos el subespacio propio $S_{A,3}$ asociado al valor propio 3, esto es, resolvamos la ecuación $(A - 3I_2)x = \mathbf{0}_2$.

$$\begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -25 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \mathrel{*}= 1/4} \begin{bmatrix} -5/2 & 1 \\ -25 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mathrel{-}= 10R_1} \begin{bmatrix} -5/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El conjunto solución es

$$S_{A,3} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ (5/2)x_1 \end{bmatrix} : \ x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \ell(u_1), \qquad \text{donde} \qquad u_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

La multiplicidad geométrica es igual a 1 y es estrictamente menor que la multiplicidad algebraica. Por eso la matriz A no es diagonalizable.

Otra forma de explicar que A no es diagonalizable: el único subespacio propio es $S_{A,3}$, y su dimensión es 1, por eso no podemos encontrar en $\mathbb{R}^2$ dos vectores propios de A que sean linealmente independientes, por consecuencia, no existe ninguna base de $\mathbb{R}^2$ cuyos elementos sean vectores propios de A.

Vamos a buscar una base $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ y una matriz $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ tal que la matriz $P^{-1}AP$ sea una matriz de Jordan J. Como las entradas diagonales de J deben ser valores propios de A y J no puede ser matriz diagonal,

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Es la matriz asociada al operador lineal $T(x) = Ax$ respecto a la base $\mathcal{U}$. Por la definición de la matriz asociada, los vectores u_1, u_2 deben satisfacer las igualdades

$$
\begin{aligned}
Au_1 &= 3u_1, && (1)\\
Au_2 &= u_1 + 3u_2. && (2)
\end{aligned}
$$

Ya hemos encontrado un vector u_1 con la propiedad (1). Falta encontrar u_2. Escribimos la ecuación (2) como $(A - 3I_2)u_2 = u_1$:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -10 & 4 & 2 \\ -25 & 10 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 *= 1/4} \left[\begin{array}{rr|r} -5/2 & 1 & 1/2 \\ -25 & 10 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 -= 10R_1} \left[\begin{array}{rr|r} -5/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Una solución particular se obtiene con $x_1 = 1$:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ formada por las columnas u_1 y u_2 es

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Su inversa es

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \operatorname{adj}(P) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $PP^{-1} = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Comprobamos que $P^{-1}AP = J$:

$$
\begin{aligned}
AP &= \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -25 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14+20 & -7+12 \\ -50+65 & -25+39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 15 & 14 \end{bmatrix},\\
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18-15 & 15-14 \\ -30+30 & -25+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = J. \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

La matriz J es la forma canónica de Jordan de A. Ahora el polinomio mínimo se calcula fácilmente a partir de J. Como el polinomio característico se factorizó en factores de grado 1 y 3 es el único valor propio de A, el polinomio mínimo debe ser $(\lambda - 3)^p$ con algún $p \in \{1, 2\}$. La potencia correcta p es igual al orden máximo de los bloques de Jordan con entrada diagonal 3 en la matriz J. El único bloque de Jordan en esta matriz es $J_2(3)$, así que

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2.$$

Para comprender mejor la receta que hemos usado para hallar μ_A podemos razonar de la siguiente manera. Notamos que $J-3I_2 \neq \mathbf{0}_{2\times 2}$ y $(J-3I_2)^2 = \mathbf{0}_{2\times 2}$. Como las matrices A y J son similares ($P^{-1}AP = J$), las mismas relaciones son válidas para A:

$$\begin{aligned} A - 3I_2 &= \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -25 & 10 \end{bmatrix}, \\ (A-3I_2)^2 &= \begin{bmatrix} 100-100 & -40+40 \\ 250-250 & -100+100 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2\times 2}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Falta calcular $\exp(tA)$.

$$\begin{aligned} f(t) &\coloneqq \exp(tA) = P\exp(tJ)P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} & t\,\mathrm{e}^{3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3-5t)\,\mathrm{e}^{3t} & (-1+2t)\,\mathrm{e}^{3t} \\ -5\,\mathrm{e}^{3t} & 2\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-10t)\,\mathrm{e}^{3t} & 4t\,\mathrm{e}^{3t} \\ -25t\,\mathrm{e}^{3t} & (1+10t)\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por las propiedades de la función exponencial se cumple la fórmula $f'(t) = Af(t)$. Hagamos la comprobación de esta igualdad. Usamos la fórmula

$$\big((\alpha+\beta t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}\big)' = (\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}\,.$$

Con esta fórmula,

$$f'(t) = \begin{bmatrix} (-7-30t)\,\mathrm{e}^{3t} & (4+12t)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (-25-75t)\,\mathrm{e}^{3t} & (13+30t)\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Af(t) &= \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -25 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-10t)\,\mathrm{e}^{3t} & 4t\,\mathrm{e}^{3t} \\ -25t\,\mathrm{e}^{3t} & (1+10t)\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-7+70t-100t)\,\mathrm{e}^{3t} & (-28t+4+40t)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (-25+250t-325t)\,\mathrm{e}^{3t} & (-100t+13+130t)\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-7-30t)\,\mathrm{e}^{3t} & (4+12t)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (-25-75t)\,\mathrm{e}^{3t} & (13+30t)\,\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Hemos comprobado la igualdad $f'(t) = Af(t)$.