Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Examen parcial I. Variante α.

Operaciones con matrices. Sistemas de ecuaciones lineales.

Nombre:

<table>
<tr><td rowspan="2">Calificación (%):</td><td>examen escrito</td><td>tarea 1</td><td>tarea 2</td><td>asist.+ particip.</td><td>parcial 1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Enunciado: propiedades de la adición en $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, incluso las propiedades principales de la matriz nula y de la matriz opuesta.

B. Definición: ¿cuándo se dice que la matriz B es inversa a la matriz A?.

C. Definición: matriz pseudoescalonada (o matriz escalonada, escriba lo que prefiere).

Problema 2. *9 %.*
Resuelva el sistema de ecuaciones lineales. Indicación: transforme la matriz del sistema en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida aplicando operaciones elementales por renglones a la matriz aumentada, escriba la solución general y haga la comprobación para una solución particular.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -4 & -2 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -6 & 2 & 2 & -6 \end{array}\right].$$

Problema 3. *9 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *10 %.*
Calcule A^n. La parte no trivial consiste en obtener una fórmula explícita (que dependa sólo de λ y n) para la $(3,1)$-ésima entrada de A^n.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Problema 5. *11 %.*
Propiedad asociativa de la adición de matrices. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Demuestre que $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Problema 6. *11 %.*
Matriz transpuesta del producto de dos matrices. Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Demuestre que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Problema 7. *11 %.*
Escriba la definición de la equivalencia de matrices por la izquierda (llamada también equivalencia por renglones). Demuestre que esta relación binaria es transitiva, simétrica y reflexiva.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Examen parcial I. Variante β.

Operaciones con matrices. Sistemas de ecuaciones lineales.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	tarea 1	tarea 2	asist.+ particip.	parcial 1

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Enunciado: criterio de la invertibilidad de una matriz cuadrada (seis condiciones equivalentes).

B. Definiciones: matriz triangular superior, matriz triangular inferior.

C. Definición: operaciones elementales con renglones.

Problema 2. *9 %.*
Resuelva el sistema de ecuaciones lineales homogéneas transformando su matriz en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida. Represente la solución general como una combinación lineal de vectores constantes. Haga la comprobación para cada uno de esos vectores constantes.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & 4 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Problema 3. *9 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *10 %.*
Resuelva el sistema de ecuaciones lineales para todo valor del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

Problema 5. *11 %.*
Propiedad distributiva del producto de los elementos de $\mathbb{R}^n$ por escalares con respecto a la adición en $\mathbb{R}^n$. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

Problema 6. *11 %.*
Producto de dos matrices triangulares superiores. Sean A y B matrices triangulares superiores: $A, B \in \mathrm{ut}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que su producto AB también es triangular superior.

Problema 7. *11 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $A \overset{\text{izq}}{\sim} B$ y A es invertible por la derecha, esto es, existe una matriz $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AC = I_n$. Demuestre que B también es invertible por la derecha.

Engrape aquí
No doble

Álgebra II, licenciatura. Examen parcial I. Variante γ.

Operaciones con matrices. Sistemas de ecuaciones lineales.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	tarea 1	tarea 2	asist.+ particip.	parcial 1

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Enunciado: propiedades principales de la matriz transpuesta.

B. Definición: el producto de matrices.

C. Definición: matrices equivalentes por la derecha (= matrices equivalentes por columnas).

Problema 2. *9 %.*
Resuelva el sistema de ecuaciones lineales. Indicación: transforme la matriz del sistema en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida aplicando operaciones elementales por renglones a la matriz aumentada, escriba la solución general y haga la comprobación para una solución particular.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -3 & 3 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Problema 3. *9 %.*
Aplicando operaciones elementales por renglones transforme la matriz dada A en la matriz identidad. Basándose en la secuencia de las operaciones elementales aplicadas en este proceso escriba las matrices A y A^{-1} como productos de matrices elementales. Para la comprobación calcule la matriz A^{-1} a partir de su descomposición en matrices elementales, luego multiplique A por A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *10 %.*
Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices invertibles. Demuestre que las matrices $A^\top$ y AB son invertibles. Indicación: indique cuál matriz es la inversa a la matriz $A^\top$ y demuestre que efectivamente la es, indique cuál matriz es la inversa a la matriz AB y demuestre que efectivamente la es.

Problema 5. *11 %.*
Descomposición de una matriz cuadrada en la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que existe un único par de matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $A = B + C$, B es simétrica y C es antisimétrica.

Problema 6. *11 %.*
Producto de una matriz por un vector básico. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y sea $e_p = \left[\delta_{i,p}\right]_{i=1}^n$. Calcule el producto Ae_p. Indicación: con ayuda de ejemplos puede adivinar la fórmula, luego hay que demostrarla usando la definición del producto de una matriz por un vector y la propiedad principal de la delta de Kronecker.

Problema 7. *11 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible por la derecha. Demuestre que $A \overset{\text{izq}}{\sim} I_n$.