Guía. Álgebra II. Examen parcial III.
Transformaciones lineales.

Teoremas los más importantes
cuyas demostraciones se pueden incluir en el examen

1. Teorema de la representación matricial de una transformación lineal (la propiedad principal de la matriz asociada a una transformación lineal).

2. Teorema de la unicidad de la representación matricial de una transformación lineal.

3. Teorema de la determinación de una transformación lineal por las imágenes de los vectores básicos.

4. Fórmula del cambio de la matriz asociada a una transformación lineal al cambiar las bases del dominio y codominio.

5. Teorema del rango y nulidad.

6. Teorema: todo isomorfismo de espacios vectoriales transforma toda base del dominio en una base del contradominio.

7. Teorema: si los espacios vectoriales V y W son de la misma dimensión finita, entonces existe un isomorfismo lineal de V sobre W.

8. Teorema de la separación de un punto y un subespacio por medio de un funcional lineal.

9. Teorema de la base dual: la definición de los funcionales que forman la base dual, la demostración su independencia lineal y la demostración de la expansión de un funcional lineal respecto a la base dual.

10. Teorema del isomorfismo de un espacio vectorial sobre su espacio bidual.

11. Teorema de la dimensión del anulador.

12. Teorema del anulador del anulador.

Definiciones y enunciados que se pueden incluir en el examen

1. Definición de transformación lineal.
2. Definición de operaciones lineales con transformaciones lineales.
3. Definición del producto de transformaciones lineales.
4. Definición de la matriz asociada a una transformación lineal en un par de bases.
5. Teorema de la representación matricial de una transformación lineal: ¿cómo se expresa el vector de coordenadas de $\mathsf{T}(\nu)$ respecto una base del contradominio a través del vector de coordenadas de ν respecto una base del dominio?
6. Teorema de la unicidad de la representación matricial de una transformación lineal.
7. Teorema sobre la determinación de una transformación lineal por sus valores en los vectores de una base.
8. Definición del núcleo de una transformación lineal.
9. Definición de la imagen de una transformación lineal.
10. Criterio de la inyectividad de una transformación lineal en términos de su núcleo.
11. Proposición sobre un generador de la imagen de una transformación lineal: si $\mathsf{T} \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces ¿qué conjunto puede servir como generador de $\operatorname{im}(\mathsf{T})$?
12. Teorema sobre el rango y la nulidad (dimensiones de la imagen y del núcleo) de una transformación lineal.
13. Definición de transformación inversa a una transformación lineal.
14. Propiedades de la inversa (inversa de la inversa, inversa del producto de transformaciones lineales).
15. Criterio de la inversibilidad de una transformación lineal en el caso cuando el dominio y el codominio son de la misma dimensión finita.
16. Criterio de que dos espacios vectoriales de dimensiones finitas son isomorfos.
17. Definición de funcional lineal.
18. Definición del espacio dual (con operaciones lineales).
19. Teorema de la separación de un punto y un subespacio por medio de un funcional lineal.
20. Definición de la base dual.
21. Fórmula de la expansión de un funcional lineal respecto a la base dual.

22. Definición del anulador de un conjunto de vectores.
23. Definición del anulador de un conjunto de funcionales.
24. Fórmula para la dimensión del anulador.
25. Teorema del anulador del anulador.

Engrape aquí
No doble

Examen parcial III. Transformaciones lineales. Variante α. Álgebra II.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	T5	T6	T7	asist.+ particip.	parcial 3	total (promedio)

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados o definiciones:

A. Definición: operaciones lineales en el espacio de las transformaciones lineales.

B. Definiciones: el núcleo de una transformación lineal, la imagen de una transformación lineal.

C. Teorema de la separación de un punto y un subespacio por medio de un funcional lineal.

Problema 2. *11 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a la transformación lineal con respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ aplicando la regla de correspondencia de T, escriba el vector $(T(Y))_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} Y_{\mathcal{E}}$.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *8 %.*
Construya una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y haga la comprobación. Describa el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *10 %.*
Enuncie y demuestre el teorema de la representación matricial de una transformación lineal.

Problema 5. *10 %.*
Enuncie el teorema de la base dual, incluso la definición de los funcionales que forman esta base. Escriba la mitad de la demostración, concretamente la expansión de un funcional lineal arbitrario en una combinación lineal de los funcionales que forman la base dual.

Problema 6. *5 %.*
Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ una transformación lineal inyectiva y sean $a_1, \ldots, a_k \in V$ algunos vectores linealmente independientes. Demuestre que los vectores $T(a_1), \ldots, T(a_k)$ son linealmente independientes.

Problema 7. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial y sea $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto de V. Denotemos por S al subespacio de V generado por X. Demuestre que el anulador de X coincide con el anulador de S: $X^0 = S^0$.

Problema 8. *11 %.*
Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección, esto es, $P^2 = P$. Muestre que la transformación $Q \coloneqq I - P$ también es una proyección. Demuestre que $\operatorname{im}(P) = \ker(Q)$.

Examen parcial III. Transformaciones lineales. Variante β.
Álgebra II.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	T5	T6	T7	asist.+ particip.	parcial 3	total (promedio)

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados o definiciones:

A. Definición: la matriz asociada a una transformación lineal, con respecto a un par de bases.

B. Definición: transformación inversa a una transformación lineal.

C. Teorema sobre el rango y la nulidad (dimensiones de la imagen y del núcleo) de una transformación lineal.

Problema 2. *11 %.*
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = 2P(-1) + P'(2).$$

I. Demuestre que φ es un funcional lineal.

II. Calcule las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcule $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 1 - 3t + 3t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^t Q_{\mathcal{E}}$.

Problema 3. *8 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Halle el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *10 %.*
Enuncie de manera formal y demuestre el siguiente teorema: todo isomorfismo lineal transforma cualquier base del dominio en una base del contradominio.

Problema 5. *10 %.*
Enuncie y demuestre el teorema sobre el anulador del anulador de un subespacio.

Problema 6. *5 %.*
Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Demuestre que $\operatorname{im}(T)$ es un subespacio de W.

Problema 7. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real, sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sea $\Psi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ la base dual a la base $\mathcal{A}$. Demuestre que para todo $v \in V$ y todo $\varphi \in V^*$

$$\varphi(v) = \varphi_\Phi^t v_{\mathcal{A}}.$$

Problema 8. *11 %.*
Sea $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$, y sea $a \in V$ tal que $\varphi(a) \neq 0$. Demuestre que V es la suma directa de los subespacios $\ell(a)$ y $\ker(\varphi)$.