Guía. Álgebra III. Examen parcial III.
Forma canónica de Jordan. Producto interno.

Teoremas con demostraciones que se pueden incluir en el examen:

1. Fórmula para $f(J_m(\lambda))$, donde $J_m(\lambda)$ es el bloque de Jordan de orden m con entrada diagonal λ y f es un polinomio con coeficientes complejos.

2. Fórmula para calcular el número de bloques de cada tamaño en la forma canónica de Jordan de un operador lineal. (Es la parte principal del teorema de la unicidad de la forma canónica de Jordan.)

3. Desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz.

4. Teorema de la norma inducida por un producto interno.

5. Teorema de la proyección ortogonal de un vector al subespacio generado por vectores ortogonales no nulos.

6. Teorema de la conservación de los subespacios generados en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

7. Teorema de la representación de funcionales lineales en espacios unitarios (teorema de Riesz-Fréchet en el caso de dimensión finita).

Enunciados y definiciones que se pueden incluir en el examen (hay que escribirlos en forma completa, con todos detalles):

1. Teorema de la descomposición primaria.
2. Operador lineal nilpotente.
3. Criterio de operador lineal nilpotente en un espacio vectorial de dimensión finita, en términos de su polinomio mínimo.
4. Criterio de operador lineal nilpotente en un espacio vectorial de dimensión finita, en términos de su polinomio característico.
5. Criterio de operador lineal nilpotente en un espacio vectorial complejo de dimensión finita, en términos de su espectro.
6. Definición formal del bloque de Jordan $J_m(\lambda)$, usando el símbolo de Kronecker.
7. Potencias de los bloques de Jordan $J_m(0)^k$, donde $m = 2, 3, 4$, $k = 2, 3, 4$.
8. Fórmula para el rango de la matriz $(J_m(0))^k$.
9. Fórmula para $f(J_m(\lambda))$, donde $f \in \mathcal{P}\,\mathbb{C}$.
10. Fórmula para $\exp(tJ_2(\lambda))$.
11. Fórmula para $\exp(tJ_3(\lambda))$.
12. Fórmula para calcular el número de los bloques de Jordan de cada tamaño en una matriz de Jordan a través de ciertos rangos.
13. Fórmula para el polinomio mínimo de una matriz de Jordan.

14. Definición de producto interno.
15. Definición general de norma en un espacio vectorial complejo.
16. Teorema de la norma inducida por un producto interno.
17. Identidad de paralelogramo.
18. Identidades de polarización para el caso real.
19. Identidad de polarización para el caso complejo.
20. Definición general de distancia (métrica).
21. Definición de la distancia inducida por una norma.
22. Definición de vectores ortogonales.

23. Definición de lista ortonormal de vectores.
24. Teorema generalizado de Pitágoras.
25. Teorema de la proyección ortogonal de un vector al subespacio generado por vectores ortogonales no nulos.
26. Independencia lineal de vectores ortogonales no nulos.
27. Criterio de pertenencia de un vector al subespacio generado por vectores ortonormales (incluso la igualdad de Parseval).
28. Criterio para que una lista ortonormal de vectores sea una base.
29. Fórmulas del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.
30. Teorema de la conservación de subespacios en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.
31. ¿Cuándo aparecen vectores nulos en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt?.
32. Criterios para que una transformación lineal sea isometría (en términos de la norma, del producto interno y de listas ortonormales de vectores).
33. Teorema de la representación de funcionales lineales en un espacio unitario (teorema de Riesz-Fréchet) en el caso complejo.
34. Biyección canónica de un espacio euclidiano complejo V sobre su espacio dual V^*.
35. Definición del complemento ortogonal de un conjunto.
36. Fórmula para la dimensión del complemento ortogonal.
37. Fórmula para el complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio en un espacio euclidiano o unitario.
38. Explique qué significa la frase: el espacio unitario V es la suma ortogonal de sus subespacios S_1 y S_2.

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Examen parcial III. Variante α.

Forma canónica de Jordan. Producto interno.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	tarea individual 5	asist.+ particip.	parcial 3	total

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Teorema de la descomposición primaria.

B. Definición de *operador nilpotente* y de su *índice de nilpotencia*.

C. Fórmula para calcular el número de bloques de Jordan $J_k(\lambda_0)$ en una matriz de Jordan A, a través de los rangos de ciertas matrices.

Problema 2. *20 %.*
Enuncie y demuestre el teorema de la representación de funcionales lineales en espacios unitarios (teorema de Riesz-Fréchet en el caso de dimensión finita).

Problema 3. *15 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construídos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 26 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *18 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente. Demuestre que la matriz $I_n - A$ es invertible y construya su inversa.

Problema 5. *17 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales con producto interno y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal que preserva norma:

$$\forall v \in V \qquad \|Tv\|_W = \|v\|_V.$$

Demuestre que T preserva producto interno:

$$\forall a, b \in V \qquad \langle Ta, Tb\rangle_W = \langle a, b\rangle_V.$$

Problema 6. *25 %.*
En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A^t B)$$

consideremos el subespacio S que consiste en todas las matrices que tienen traza nula:

$$S := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\colon\ \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

Encuentre una base de S y una base de $S^\perp$.

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Examen parcial III. Variante β.

Forma canónica de Jordan. Producto interno.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	tarea individual 5	asist.+ particip.	parcial 3	total

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Definición de producto interno.

B. Criterio de pertenencia de un vector v al subespacio S generado por vectores ortonormales $a_1, \ldots, a_m$. Escriba por lo menos tres condiciones equivalentes, incluso la igualdad de Parseval.

C. Criterio para que una transformación lineal sea isometría (en términos de la norma, del producto interno y de listas ortonormales de vectores).

Problema 2. *20 %.*
Enuncie y demuestre la fórmula para calcular el número de bloques de cada tamaño en la forma canónica de Jordan de un operador lineal.

Problema 3. *15 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construídos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *18 %.*
Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V. Supongamos que $\operatorname{im}(T^5) = \operatorname{im}(T^6)$. Demuestre que $\operatorname{im}(T^6) = \operatorname{im}(T^7)$.

Problema 5. *17 %.*
Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Denotemos por b_1, b_2, b_3 a los vectores que se obtienen de a_1, a_2, a_3 al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Supongamos que $b_3 = 0$. Demuestre que a_3 es una combinación lineal de a_1 y a_2.

Problema 6. *25 %.*
Sea V un espacio unitario y sean S_1, S_2 subespacios de V. Exprese $(S_1 + S_2)^{\perp}$ a través de $S_1^{\perp}$ y $S_2^{\perp}$. (Escriba la fórmula y demuéstrela.)