Guía. Álgebra III. Examen parcial II.
Valores y vectores propios. Forma canónica de Jordan.

Teoremas con demostraciones que se pueden incluir en el examen

El examen puede incluir una demostración entera o una parte esencial de la demostración. El estudiante tiene que escribirla de manera breve y clara, sin olvidar todas las ideas importantes. Puede utilizar lemas convenientes, pero en este caso tiene que enunciar o al menos mencionar bien los lemas que se usan.

1. Teorema de la independencia lineal de subespacios propios asociados a diferentes valores propios.

2. Teorema de las multiplicidades algebraica y geométrica.

3. Teorema de Cayley-Hamilton.

4. Teorema que cada ideal en el anillo de los polinomios de una variable se puede generar por un elemento (hay que enunciarlo de manera más formal).

5. Teorema de las raíces del polinomio mínimo.

6. Criterio para que un operador lineal sea diagonalizable.

7. Teorema del mapeo del espectro.

Enunciados y definiciones que se pueden incluir en el examen

Hay que escribir los enunciados y definiciones en forma completa, con todos los detalles.

1. Definición: el determinante de un operador lineal.
2. Definición: el polinomio característico de un operador lineal.
3. Definición: valor propio de un operador lineal.
4. Definición: el espectro de un operador lineal (definición en términos de la invertibilidad de cierto operador lineal).
5. Definición: ideal del anillo de los polinomios.
6. Proposición sobre el conjunto de todos los polinomios anuladores de un operador lineal (hay que enunciar con detalles que este conjunto cumple con las condiciones que debe cumplir un ideal).
7. Definición: el polinomio mínimo de una transformación lineal.
8. Teorema de Cayley-Hamilton.
9. Teorema de las raíces del polinomio mínimo.
10. Relación entre el polinomio característico y el polinomio mínimo.
11. Definición: la multiplicidad algebraica de un valor propio.
12. Definición: la multiplicidad geométrica de un valor propio.
13. Definición: subespacio invariante.
14. Proposición de la matriz asociada a la compresión de un operador a su subespacio invariante.
15. Relación entre las multiplicidades algebraica y geométrica de un valor propio.
16. Independencia lineal de subespacios propios correspondientes a diferentes valores propios.
17. Independencia lineal de vectores propios correspondientes a diferentes valores propios.
18. Definición: matrices semejantes.
19. Criterio para que un operador lineal sea diagonalizable.
20. Definición de $\exp(A)$.
21. Fórmula para calcular $\exp(A)$ en el caso cuando A es una matriz diagonalizable.
22. Fórmula para $f(T)u$, donde $u \in \ker(\lambda I - T)$.
23. Teorema del mapeo del espectro.

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Examen parcial II. Variante α.

Valores y vectores propios. Forma canónica de Jordan.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	tarea individual 3	tarea individual 4	asist.+ particip.	parcial 2

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Definición: el polinomio mínimo de un operador lineal.

B. Proposición: relación entre el polinomio característico y el polinomio mínimo de un operador lineal (el estudiante debe comprender de qué relación se trata).

C. Definición de $\exp(A)$ como una serie de potencias de A. Fórmula para calcular $\exp(A)$ en el caso cuando A es una matriz diagonalizable.

Problema 2. *15 %.*
Haga el **análisis espectral** de la matriz A según el siguiente plan:

I. Calcule el polinomio característico y el espectro de la matriz A.

II. Determine si A es diagonalizable. Para cada uno de los valores propios calcule los vectores propios correspondientes y los vectores propios generalizados, si A no es diagonalizable.

III. Escriba una matriz de Jordan J (en particular, J puede ser una matriz diagonal) y una matriz invertible P tales que $AP = PJ$. Haga la comprobación de la última igualdad.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *15 %.*
Enuncie y demuestre el teorema de la independencia lineal de subespacios propios correspondientes a diferentes valores propios. En vez de esto, puede enunciar y demostrar el teorema de la independencia lineal de vectores propios correspondientes a diferentes valores propios.

Problema 4. *8 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ una matriz de Jordan. Escriba todas las formas posibles de A si se sabe que $C_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$.

Problema 5. *8 %.*
Demuestre que $\mathrm{Sp}(A^t) = \mathrm{Sp}(A)$ para toda matriz cuadrada A.

Problema 6. *8 %.*
Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $T\colon V \to V$ un operador lineal, $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ y $u \in \ker(\lambda I - T)$. Demuestre por inducción que $T^m(u) = \lambda^m u$ para todo $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Problema 7. *16 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que el polinomio mínimo de A es igual con el polinomio mínimo de A^t.

Engrape aquí
No doble

Álgebra III. Examen parcial II. Variante β.

Valores y vectores propios. Forma canónica de Jordan.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito	tarea individual 3	tarea individual 4	asist.+ particip.	parcial 2

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Definición: valor propio de un operador lineal.

B. Teorema de Cayley-Hamilton.

C. Definición de la multiplicidad algebraica de un valor propio y relación entre las multiplicidades algebraica y geométrica (no es necesario escribir la definición de la multiplicidad geométrica).

Problema 2. *15 %.*
Haga el **análisis espectral** de la matriz A según el siguiente plan:

I. Calcule el polinomio característico y el espectro de la matriz A.

II. Determine si A es diagonalizable. Para cada uno de los valores propios calcule los vectores propios correspondientes y los vectores propios generalizados, si A no es diagonalizable.

III. Escriba una matriz de Jordan J (en particular, J puede ser una matriz diagonal) y una matriz invertible P tales que $AP = PJ$. Haga la comprobación de la última igualdad.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *15 %.*
Enuncie y demuestre el teorema de Cayley-Hamilton.

Problema 4. *8 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Escriba todas las formas posibles del polinomio mínimo de A si $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 4\}$.

Problema 5. *8 %.*
Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n y T un operador lineal en V. Demuestre que el polinomio característico de T no depende de la base, es decir, para cualesquiera bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ del espacio V,

$$\det(\lambda I_n - T_{\mathcal{A}}) = \det(\lambda I_n - T_{\mathcal{B}}).$$

Problema 6. *8 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz cuadrada tal que $A^2 = I_n$. Demuestre que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.

Problema 7. *16 %.*
Demuestre que si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable, entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (esto es, $A = 0_{3,3}$).