# Guía. Álgebra III. Examen parcial I.
# Determinantes. Formas cuadráticas.

**Teoremas con demostraciones** que se pueden incluir en el examen:

1. Teorema del determinante de la matriz transpuesta.
2. Propiedad polilineal de la función determinante.
3. Propiedad alternante de la función determinante.
4. Expresión de una función polilineal alternante a través de la función determinante.
5. Lema sobre el determinante de una matriz $A$ de orden $n$ tal que $A_{n,j} = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.
6. Expansión del determinante por cofactores a lo largo de un renglón.
7. La propiedad principal de la matriz adjunta clásica.
8. Criterio de la invertibilidad de una matriz en términos del determinante.
9. Regla de Cramer.
10. Representación matricial de una forma bilineal.
11. Unicidad de la representación matricial de una forma bilineal.
12. Fórmula de cambio de la matriz asociada a una forma bilineal al cambiar la base del espacio.
13. Unicidad de la representación matricial de una forma cuadrática.
14. Teorema de los índices de inercia.

**Enunciados y definiciones** que se pueden incluir en el examen (hay que escribirlos en forma completa, con todos detalles):

1. Definición del determinante a través de permutaciones.
2. Definición de función polilineal.
3. Definición de función alternante.
4. Definición de función antisimétrica.
5. Teorema sobre el determinante de la matriz transpuesta.
6. Teorema: determinante es una función polilineal alternante de los renglones (escribir el enunciado de manera extensa).
7. Teorema: expresión de las funciones $n$-lineales alternantes a través de determinantes.
8. Teorema sobre el determinante del producto de dos matrices.
9. Determinante y operaciones elementales.
10. Fórmula de la expansión del determinante por cofactores a lo largo de un renglón.
11. Fórmula de la expansión del determinante por cofactores a lo largo de una columna.
12. Definición de la matriz adjunta clásica.
13. Propiedad principal de la matriz adjunta clásica (sus productos por la matriz original).
14. Regla de Cramer.
15. Determinante de Vandermonde: definición y fórmula.
16. Criterio de la invertibilidad de una matriz en términos del determinante.
17. Relación entre el rango de una matriz y los tamaños de sus menores no nulos.
18. Definición de forma bilineal.
19. Definición de la matriz asociada a una forma bilineal con respecto a una base.
20. Fórmula de la representación matricial de una forma bilineal.
21. Unicidad de la representación matricial de una forma bilineal.
22. Cambio de la matriz asociada a una forma bilineal al cambiar la base del espacio.
23. Definición de forma cuadrática.
24. Identidad de paralelogramo para formas cuadráticas.

25. Identidades de polarización.
26. Definición de la matriz asociada a una forma cuadrática con respecto a una base.
27. Fórmula de la representación matricial de una forma cuadrática.
28. Unicidad de la representación matricial de una forma cuadrática.
29. Cambio de la matriz asociada a una forma cuadrática al cambiar la base.
30. Definición de los índices de inercia a través de dimensiones de ciertos subespacios.
31. Teorema de los índices de inercia de una forma cuadrática.
32. Definiciones de forma cuadrática estrictamente positiva, no negativa, estrictamente negativa, no positiva, indefinida ($q > 0$, $q \geqslant 0$, $q < 0$, $q \leqslant 0$, $q \gtreqless 0$).
33. Descripción del signo de valores de una forma cuadrática ($q > 0$, $q \geqslant 0$, $q < 0$, $q \leqslant 0$, $q \gtreqless 0$) en términos de sus índices de inercia.
34. Criterio de Sylvester de una forma cuadrática estrictamente positiva.

Engrape aquí
No doble

# Álgebra III. Examen parcial I. Variante $\alpha$.

*Determinantes. Formas cuadráticas.*

Nombre:

| Calificación (%): | examen escrito | tarea individual 1 | tarea individual 2 | asist.+ particip. | parcial 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

El examen dura 120 minutos.

**Problema 1.** *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Definición del determinante a través de permutaciones.

B. Fórmula de la expansión del determinante por cofactores a lo largo de la $k$-ésima columna.

C. Regla de Cramer.

**Problema 2.** *9 %.*
Calcule la matriz adjunta clásica $\operatorname{adj}(A)$ de la matriz $A$, calcule $\det(A)$ y compruebe que se cumple la igualdad $\operatorname{adj}(A)A = \det(A)I_3$. Escriba la matriz $A^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Problema 3.** *10 %.*
La forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$está dada por su matriz asociada $A = q_{\mathcal{E}}$ con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.Encuentre una matriz invertible $P$ y una matriz diagonal $D$ tales que $D = P^t A P$. Haga la comprobación de la última igualdad. Escriba el rango y los índices de inercia de $q$. Determine qué valores (positivos, negativos, nulos) puede tomar $q(x)$ cuando $x \neq 0$; esto es, determine cuál de los siguientes casos se cumple: $q > 0$, $q < 0$, $q \geqq 0$, $q \leqq 0$, $q \gtrless 0$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -6 & -21 & -9 \\ -4 & -9 & -12 \end{bmatrix}.$$

**Problema 4.** *15 %.*
Enuncie el teorema de los índices de inercia de una formas cuadrática. Demuestre la siguiente parte del teorema. Supóngase que

$$q_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{m},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-p-m}),$$

y que $S$ es un subespacio tal que $q|_S > 0$. Entonces $\dim(S) \leqslant p$.

**Problema 5.** *15 %.*
Lema sobre el determinante de una matriz $A$ de orden $n$ tal que $A_{n,j} = 0$ para todo $j \in \{1,\ldots,n-1\}$.

**Problema 6.** *7 %.*
Calcule el determinante $D_n$. Indicación: calcule $D_4$ de tal manera que el mismo método se pueda generalizar al caso de orden arbitrario.

$$D_n = \det\left(|i-j|\right)_{i,j=1}^{n}.$$

**Problema 7.** *7 %.*
Sean $f, g, h \colon V \times V \to \mathbb{R}$ formas bilineales, $g$ simétrica, $h$ antisimétrica, $f = g + h$. Exprese $g$ y $h$ a través de $f$.

**Problema 8.** *16 %.*
Construya una forma cuadrática $q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que su "núcleo"

$$N_q \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon q(x) = 0\}$$

no sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Dibuje $N_q$ en el plano euclidiano. Sugerencia: es suficiente probar las formas cuadráticas

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2, \qquad q(x) = x_1^2 - x_2^2, \qquad q(x) = x_1^2.$$

Engrape aquí
No doble

# Álgebra III. Examen parcial I. Variante $\beta$.

*Determinantes. Formas cuadráticas.*

Nombre:

| Calificación (%): | examen escrito | tarea individual 1 | tarea individual 2 | asist.+ particip. | parcial 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

El examen dura 120 minutos.

**Problema 1.** *9 %.*
Escriba los siguientes enunciados y definiciones:

A. Identidad de polarización para una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial real.

B. Escriba cuándo $q < 0$, $q \geqslant 0$, $q \gtrless 0$ en términos de los índices de inercia de $q$.

C. Definición de los índices de inercia a través de las dimensiones de ciertos subespacios.

**Problema 2.** *9 %.*
Resuelva el sistema de ecuaciones lineales con la regla de Cramer. Haga la comprobación.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

**Problema 3.** *10 %.*
La forma cuadrática $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está dada por su matriz $A = q_{\mathcal{E}}$ asociada respecto la base canónica $\mathcal{E}$. Calcule todos los menores principales de la matriz $A$. Usando los criterios de Sylvester determine el signo de los valores de $q$ en los vectores no nulos, esto es, determine cuál de los siguientes casos se cumple: $q > 0$, $q < 0$, $q \geqq 0$, $q \leqq 0$, $q \gtrless 0$. Para la comprobación diagonalice $q$ (sin calcular la matriz de cambio) y calcule sus índices de inercia.

$$A = q_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

**Problema 4.** *15 %.*
Enuncie y demuestre el teorema de la unicidad de la representación matricial de una forma cuadrática.

**Problema 5.** *15 %.*
Propiedad alternante de la función determinante. Enuncie y demuestre el criterio de la invertibilidad de una matriz en términos de su determinante.

**Problema 6.** *7 %.*
Calcule el determinante dado $D_4$ de tal manera que el mismo método se pueda aplicar para calcular $D_n$ con $n$ arbitrario. Escriba la fórmula general para $D_n$.

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}.$$

**Problema 7.** *7 %.*
La relación de congruencia se define en el espacio de las matrices reales simétricas de orden $n$ mediante la siguiente regla: $A \cong B \iff$ existe una matriz invertible $P$ de orden $n$ tal que $B = P^t A P$. Demuestre que la relación de congruencia es una relación de equivalencia.

**Problema 8.** *16 %.*
Enuncie la fórmula para el determinante de la matriz de Vandermonde y escriba la siguiente parte de la demostración: la reducción del determinante de Vandermonde de orden $n$ al determinante de Vandermonde de orden $n-1$.