Engrape aquí
No doble

Álgebra II. Examen extraordinario. Variante α.

Matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, bases y dimensión, transformaciones lineales, funcionales lineales.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados o definiciones:

A. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ¿Cuándo se dice que la matriz A es invertible?

B. Definición: la dimensión de un espacio vectorial.

C. Definición de la matriz asociada a una tranformación lineal con respecto a un par de bases (en otras palabras, la matriz de una transformación lineal en un par de bases).

Problema 2. *15 %.*
Construya una base $\mathcal{B}$ del espacio generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Represente cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y haga las comprobaciones.

$$f_1 = 1 - 3x - x^2 + 5x^3, \qquad f_2 = 3 + 5x + 4x^2 - 6x^3, \qquad f_3 = 1 + x + x^2 - x^3,$$
$$f_4 = -4 - 2x^2 - 2x^3, \qquad f_5 = 6 - 2x + 2x^2 + 6x^3.$$

Problema 3. *15 %.*
Demuestre que la función $T\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la siguiente regla es una transformación lineal.

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz asociada a T respecto a la base $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Para comprobar la respuesta calcule $T(Y)$ de dos maneras diferentes:

1) usando la matriz asociada;

2) aplicando la regla de correspondencia de T.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *8 %; se baja el 2 % por cada error.*
Están dadas las matrices asociadas a las transformaciones lineales S, T, U respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango = dim(imagen)			
nulidad = dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Problema 5. *15 %.*
Sean A y B matrices reales triangulares superiores de orden n. Demuestre que su producto AB también es una matriz triangular superior.

Problema 6. *15 %.*
Demuestre que el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad |x_1| = x_2 \right\}$$

no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Indicación: dibuje S en el plano euclidiano, aplique el criterio de subespacio, determine cuál condición del criterio no se cumple y dé un contraejemplo concreto.

Problema 7. *15 %.*
Construya una base de S, donde S es el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas 2×2 cuyas entradas diagonales coinciden:

$$S = \big\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \quad A_{1,1} = A_{2,2} \big\}.$$

Problema 8. *15 %.*
Sea $T \colon V \to W$ una transformación lineal inyectiva y sean $a_1, \ldots, a_m$ vectores linealmente independientes del espacio V. Demuestre que los vectores $T(a_1), \ldots, T(a_m)$ son linealmente independientes.

Problema 9. *15 %.*
Sea V un espacio vectorial y sea $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un subconjunto de V. Denotemos por S al subespacio de V generado por X. Demuestre que el anulador de X coincide con el anulador de S: $X^0 = S^0$.

Álgebra II. Examen extraordinario. Variante β.

Matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, bases y dimensión, transformaciones lineales, funcionales lineales.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Escriba los siguientes enunciados o definiciones:

A. Definición de espacios vectorial: axiomas de adición.

B. Teorema del rango del producto de dos matrices.

C. Teorema sobre el anulador del anulador.

Problema 2. *15 %.*
Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores a_1, a_2, a_3. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales homogéneas cuyo conjunto solución sea S. Haga la comprobación: los vectores a_1, a_2, a_3 deben satisfacer al sistema de ecuaciones obtenido.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *15 %.*
Sean V y W espacios vectoriales reales, sea $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ una base de V y sea $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ una base de W. Se considera una transformación lineal $T\colon V \to W$ dada por su matriz asociada $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Construya una base de $\ker(T)$ y una base de $\operatorname{im}(T)$. Calcule el rango y la nulidad de T. Haga las comprobaciones.

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *8 %; se baja el 2 % por cada error.*
Están dadas las matrices asociadas a las transformaciones lineales S, T, U respecto a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)			
dim(contradominio)			
rango = dim(imagen)			
nulidad = dim(núcleo)			
¿es inyectiva?			
¿es suprayectiva?			
¿es invertible?			

Problema 5. *15 %.*
Sea A una matriz antisimétrica e invertible (no singular). Demuestre que su inversa A^{-1} también es antisimétrica.

Problema 6. *15 %.*
Sea V un espacio vectorial real y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lambda\,0 = 0$ usando solamente axiomas de espacio vectorial.

Problema 7. *15 %.*
Sean A, B matrices reales cuadradas del mismo orden n, además sea B invertible. Demuestre que AB y A son del mismo rango: $\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}(A)$.

Problema 8. *15 %.*
Sea $P\colon V \to V$ una transformación lineal tal que $P^2 = P$. Demuestre que

$$\mathrm{im}(P) = \ker(I - P).$$

Problema 9. *15 %.*
Sea V un espacio vectorial real, sea $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal no nulo y sea $w \in V$ tal que $\varphi(w) \neq 0$. Demuestre que el espacio V es la suma directa del subespacio generado por w y del núcleo de φ:

$$V = \ell(w) \oplus \ker(\varphi).$$