Operaciones elementales

Objetivos. Conocer y justificar operaciones elementales con ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales, conocer su forma matricial (operaciones elementales con renglones de una matriz), mostrar que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales no se cambia al aplicar operaciones elementales.

Requisitos. Sistema de ecuaciones lineales, conjunto solución, sistemas de ecuaciones equivalentes, forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales, renglones de una matriz.

Aplicaciones. Eliminación de Gauss, eliminación de Gauss-Jordan, solución de sistemas de ecuaciones lineales.

1. Sistema de ecuaciones lineales y su forma matricial. Consideramos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1; \\ & & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array} \right. \tag{1}$$

Vamos a conocer *operaciones elementales* que permiten simplificar este sistema de ecauciones y no cambian el conjunto de las soluciones.

El sistema (1) se puede escribir brevemente en forma

$$Ax = b,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

La matriz

$$\left[\ A \mid b\ \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

se llama *matriz aumentada* del sistema de ecuaciones lineales (1).

2. Definición (operaciones elementales con un sistema de ecuaciones lineales). Las siguientes operaciones con un sistema de ecuaciones lineales se llaman *operaciones elementales*:

- Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
- Intercambiar de posición dos ecuaciones.
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

3. Operaciones elementales con renglones de una matriz. A las operaciones elementales con un sistema de ecuaciones lineales les corresponden las siguientes *operaciones elementales con renglones* de la matriz aumentada del sistema:

- Multiplicar un renglón por un escalar no nulo.
  Notación: $R_p *= \lambda$, donde $p \in \{1 \ldots, m\}$, $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.
- Intercambiar de posición dos renglones.
  Notación: $R_p \leftrightarrow R_q$, donde $p, q \in \{1, \ldots, m\}$, $p \neq q$.
- Sumar a un renglón un múltiplo de otro.
  Notación: $R_q += \lambda R_p$, donde $p, q \in \{1, \ldots, m\}$, $p \neq q$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Invertibilidad de las operaciones elementales

4. Proposición (operaciones elementales son invertibles). Cada una de las operaciones elementales con renglones es invertible. Si la matriz B se obtiene de la matriz A al aplicar una operación elemental por renglones, entonces la matriz inicial A también se puede obtener de la matriz B al aplicar cierta operación elemental por renglones:

1. Si $A \xrightarrow{R_p \mathrel{*}= \lambda} B$, donde $\lambda \neq 0$, entonces $B \xrightarrow{R_p \mathrel{*}= \frac{1}{\lambda}} A$.
2. Si $A \xrightarrow{R_p \leftrightarrow R_q} B$, donde $p \neq q$, entonces $B \xrightarrow{R_p \leftrightarrow R_q} A$.
3. Si $A \xrightarrow{R_q \mathrel{+}= \lambda R_p} B$, donde $p \neq q$, entonces $B \xrightarrow{R_q \mathrel{+}= -\lambda R_p} A$.

Demostración. Aunque la proposición es obvia, escribamos la demostración formal del inciso 3. Los renglones de la matriz B se expresan a través de los renglones de A mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} B_{q,*} &= A_{q,*} + \lambda A_{p,*}; \\ B_{i,*} &= A_{i,*}, \qquad i \neq q. \end{aligned}$$

De aquí sigue que en particular que $B_{p,*} = A_{p,*}$. Por eso

$$\begin{aligned} A_{q,*} &= B_{q,*} - \lambda A_{p,*} = B_{q,*} - \lambda B_{p,*}; \\ A_{i,*} &= B_{i,*}, \qquad i \neq q. \end{aligned}$$

Esto significa que $B \xrightarrow{R_q \mathrel{+}= -\lambda R_p} A$. □

5. Ejercicio. Escriba la demostración de los incisos 1 y 2, esto es, exprese los renglones de B a través de los renglones de A y muestre cómo expresar los renglones de A a través de los renglones de B.

Justificación de las operaciones elementales

6. Proposición (operaciones elementales no cambian el conjunto de soluciones). Supóngase que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} c_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & c_{1,n}x_n & = & d_1; \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ c_{m,1}x_1 & + & \ldots & + & c_{m,n}x_n & = & d_m \end{array}\right. \tag{2}$$

se obtiene de (1) al aplicar una de las operaciones elementales. Entonces los sistemas de ecuaciones lineales (1) y (2) son equivalentes, i.e. tienen el mismo conjunto de soluciones.

Demostración. Sólo consideremos el caso cuando (2) se obtiene de (1) al aplicar la operación elemental $R_q += \lambda R_p$.

Supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una solución de (1). Entonces, en particular,

$$a_{p,1}x_1 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_p \tag{3}$$

y

$$a_{q,1}x_1 + \ldots + a_{q,n}x_n = b_q. \tag{4}$$

A la igualdad (3) le sumemos la igualdad (4) multiplicada por λ:

$$(a_{q,1} + \lambda a_{p,1}x_1) + \ldots + (a_{q,n} + \lambda a_{q,n}x_n) = b_q + \lambda b_p.$$

En otras notaciones,

$$c_{q,1}x_1 + \ldots + c_{q,n}x_n = d_q.$$

Esto significa que x cumple con la q-ésima ecuación de (2). Como las demás ecuaciones de (2) coinciden con las ecuaciones correspondientes de (1), x es una solución de (2).

Así que toda solución de (1) es solución de (2). Para demostrar que toda solución de (2) es solución de (1) notemos que (1) se puede obtener de (2) al aplicar la operación $R_q += -\lambda R_p$. □

7. Ejercicio. Escriba la demostración para las operaciones elementales de otros dos tipos: $R_p *= \lambda$ y $R_p \leftrightarrow R_q$.

Ejemplos

8. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales y hacer la comprobación:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3; \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 17; \\ -4x_1 & + & 7x_2 & & & = & -1. \end{array}\right.$$

Respuesta: $\begin{bmatrix} 2, 1, 4 \end{bmatrix}^\top$.

9. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales y hacer la comprobación:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & -4; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -11; \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & = & 0; \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 13. \end{array}\right.$$

Respuesta: $\begin{bmatrix} 3, -1, 2, -2 \end{bmatrix}^\top$.

10. Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales y haga la comprobación:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & & & = & 2; \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & -8; \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 9. \end{array}\right.$$

Respuesta: $\begin{bmatrix} 2, 4, -5 \end{bmatrix}^\top$.