Matrices elementales

Objetivos. Conocer matrices elementales y comprender que las operaciones elementales equivalen a la multiplicación por matrices elementales. Calcular las inversas de las matrices elementales.

Requisitos. Operaciones elementales, multiplicación de matrices.

1. Cada matriz elemental se obtiene de la matriz identidad al aplicar una operación elemental. Hablamos de matrices de orden n con entradas pertenecientes a un campo $\mathbb{F}$. Por lo común el orden de la matriz está claro desde el contexto y se omite.

2. Definición (matriz elemental $\boldsymbol{E_*(p,\lambda)}$). Sea $p \in \{1,\ldots,n\}$ y sea $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. La matriz $E_*(p,\lambda)$ se obtiene de I al multiplicar el p-ésimo renglón por λ:

$$I \xrightarrow{R_p \mathrel{*}= \lambda} E_*(p,\lambda)$$

3. Definición (matriz elemental $\boldsymbol{E_\leftrightarrow(p,q)}$). Sean $p,q \in \{1,\ldots,n\}$, $p \neq q$. Entonces

$$I \xrightarrow{R_p \leftrightarrow R_q} E_\leftrightarrow(p,q).$$

4. Definición (matriz elemental $\boldsymbol{E_+(p,q,\lambda)}$). Sean $p,q \in \{1,\ldots,n\}$, $p \neq q$, y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces

$$I \xrightarrow{R_p \mathrel{+}= \lambda R_q} E_+(p,q,\lambda).$$

5. Ejemplos. Ejemplos de matrices elementales de orden 3:

$$E_*(2,7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_\leftrightarrow(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_+(1,2,-7) = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Ejercicio. ¿Cuándo la matriz elemental $E_+(p,q,\lambda)$ es triangular superior? La respuesta será en términos de una relación entre p y q. ¿Cuándo $E_+(p,q,\lambda)$ es triangular inferior?

Multiplicación por las matrices elementales del lado izquierdo

7. Multiplicación por las matrices elementales del lado izquierdo. Consideremos el producto EA, donde A es una matriz arbitraria A y E es una matriz elemental. La multiplicación por las matrices elementales del lado izquierdo equivale a las operaciones elementales por renglones:

- $E_*(p, \lambda)A$ se obtiene de A al aplicar la operación $R_p *= \lambda$;
- $E_\leftrightarrow(p, q)A$ se obtiene de A al aplicar la operación $R_p \leftrightarrow R_q$;
- $E_+(p, q, \lambda)A$ se obtiene de A al aplicar la operación $R_p += \lambda R_q$.

8. Ejemplos. Multiplicar del lado izquierdo por $E_*(2, -5)$ es lo mismo que multiplicar la tercera fila por -5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ -5a_{2,1} & -5a_{2,2} & -5a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Multiplicar del lado izquierdo por $E_\leftrightarrow(1, 2)$ es lo mismo que intercambiar la primera y la segunda fila:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Multiplicar del lado izquierdo por $E_+(3, 1, 7)$ es lo mismo que sumar a la tercera fila la primera, multiplicada por 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} + 7a_{1,1} & a_{3,2} + 7a_{1,2} & a_{3,3} + 7a_{1,3} \end{bmatrix}.$$

9. Ejercicios. Calcule los productos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

10. Ejemplos. Encuentre matrices elementales E_1 y E_2 tales que:

$$E_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 50 & 60 & 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 52 & 64 & 76 \end{bmatrix}, \quad E_2 \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Multiplicación por las matrices elementales del lado derecho

11. Proposición (multiplicación por las matrices elementales del lado derecho equivale a operaciones elementales de columnas). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Entonces:

- $AE_*(p, \lambda)$ se obtiene de A al aplicar la operación $C_p * = \lambda$;
- $AE_\leftrightarrow(p, q)$ se obtiene de A al aplicar la operación $C_p \leftrightarrow C_q$;
- $AE_+(p, q, \lambda)$ se obtiene de A al aplicar la operación $C_q + = \lambda C_p$.

12. Ejercicio. Demuestre la proposición usando la matriz transpuesta.

13. Ejemplos. Encuentre matrices elementales E_1 y E_2 tales que:

$$\begin{bmatrix} 20 & -2 & 1 \\ 30 & 5 & -2 \\ 40 & 7 & -3 \end{bmatrix} E_1 = \begin{bmatrix} 19 & -2 & 1 \\ 32 & 5 & -2 \\ 43 & 7 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} E_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matrices inversas de las matrices elementales

14. Proposición (sobre las matrices inversas de las matrices elementales). Todas las matrices elementales son invertibles, y sus inversas también son matrices elementales.

Demostración. Sabemos que las operaciones elementales son invertibles:

- Para $R_p *= \lambda$, donde $\lambda \neq 0$, la operación inversa es $R_p *= \frac{1}{\lambda}$.
- $R_p \leftrightarrow R_q$ es la operación inversa a sí misma;
- Para $R_p += \lambda R_q$ la operación inversa es $R_p += (-\lambda) R_q$.

Por lo tanto:

- $E_*(p, \lambda)^{-1} = E_*(p, 1/\lambda)$;
- $E_\leftrightarrow(p, q)^{-1} = E_\leftrightarrow(p, q)$;
- $E_+(p, q, \lambda)^{-1} = E_+(p, q, -\lambda)$. $\square$

15. Ejemplos. Calcule las matrices inversas de las siguientes matrices elementales:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices transpuestas de las matrices elementales

16. Ejercicio. Escriba las matrices transpuestas de las siguientes matrices de orden 4:

$$E_*(3, 7), \qquad E_\leftrightarrow(2, 4), \qquad E_\leftrightarrow(1, 4), \qquad E_+(1, 3, -9), \qquad E_+(4, 2, -5).$$

17. Proposición (matrices transpuestas de las matrices elementales).

1. $E_*(p, \lambda)^\top = E_*(p, \lambda)$, así que la matriz $E_*(p, \lambda)$ es simétrica.
2. $E_\leftrightarrow(p, q)^\top = E_\leftrightarrow(p, q)$, así que la matriz $E_\leftrightarrow(p, q)$ es simétrica.
3. $E_+(p, q, \lambda)^\top = E_+(q, p, \lambda)$.