Independencia lineal de vectores propios asociados a diferentes valores propios

Objetivos. Introducir el concepto de subespacios linealmente independientes. Demostrar que subespacios propios correspondientes a diferentes valores propios son linealmente independientes.

Requisitos. Valor y vector propio, independencia lineal de vectores, suma directa de subespacios, polinomio básico de Lagrange.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

Independencia lineal de subespacios

1. Definición (subespacios linealmente independientes). Sean $W_1, \ldots, W_m$ subespacios de V. Se dice que los subespacios $W_1, \ldots, W_m$ son *linealmente independientes* si para todos $u_1 \in W_1, \ldots, u_m \in W_m$, la igualdad

$$u_1 + \ldots + u_m = \mathbf{0}_V$$

implica que $u_1 = \ldots = u_m = \mathbf{0}_V$.

2. Ejercicio (independencia lineal de dos subespacios). Subespacios W_1 y W_2 son linealmente independientes si y sólo si $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

3. Ejemplo. Sean W_1, W_2, W_3 tres rectas en el plano $V^2(O)$, intersectadas por pares en el origin:

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}.$$

Es fácil ver que W_1, W_2, W_3 no son linealmente independientes.

4. Tarea adicional. Sean $W_1, \ldots, W_m$ subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $W_1, \ldots, W_m$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\} \qquad W_k \cap \left(\sum_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne k}} W_j \right) = \{\mathbf{0}\}.$$

5. Ejercicio. V es la suma directa de subespacios $W_1, \ldots, W_m$ si y sólo si $V = W_1 + \ldots + W_m$ y $W_1, \ldots, W_m$ son linealmente independientes.

Polinomios de operadores y vectores propios

6. Proposición. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ y $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Sea $v \in S_{T,\lambda} := \ker(\lambda I - T)$, esto es, $Tv = \lambda v$. Entonces

$$f(T)v = f(\lambda)v.$$

Demostración. Primero se muestra por inducción que para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$T^k v = \lambda^k v.$$

Luego, si $f(x) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k x^k$, entonces

$$f(T)v = \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k T^k \right) v = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k T^k v = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \lambda^k v = \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k \lambda^k \right) v = f(\lambda)v. \qquad \square$$

Polinomio básico de Lagrange

7. Proposición (polinomio básico de Lagrange). Sean $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{F}$ algunos escalares diferentes y $k \in \{1, \ldots, m\}$. Definimos el polinomio f por medio de la siguiente fórmula:

$$f(x) := \prod_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{1}$$

Entonces $f(x_q) = \delta_{q,k}$ para cualquier $q \in \{1, \ldots, m\}$.

Demostración. Primero calculemos $f(x_k)$:

$$f(x_k) = \prod_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne k}} \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1.$$

Ahora supongamos que $q \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$ y calculemos $f(x_q)$:

$$f(x_q) = \prod_{\substack{1 \le j \le m \\ j \ne k}} \frac{x_q - x_j}{x_k - x_j}.$$

En este producto uno de los índices j coincide con q, el factor correspondiente es igual a 0, así que $f(x_q) = 0$. $\square$

Teorema de la independencia de los subespacios propios correspondientes a diferentes valores propios

8. Teorema. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ diferentes valores propios de T. Entonces los subespacios propios $W_j = \ker(\lambda_j I - T)$, donde $j \in \{1, \ldots, m\}$, son linealmente independientes.

Demostración. Para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ sea $u_j \in W_j$, esto es, $Tu_j = \lambda_j u_j$. Supongamos que

$$\sum_{j=1}^{m} u_j = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Eligimos arbitrariamente $k \in \{1, \ldots, m\}$, definimos el polinomio f por la fórmula (1) y aplicamos $f(T)$ a ambos lados de (2).

$$\mathbf{0}_= \sum_{j=1}^{m} f(T)u_j = \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)u_j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{j,k} u_j = u_k.$$ □

Corolarios

9. Corolario (independencia lineal de vectores propios). Sean $u_1, \ldots, u_m$ vectores propios de T correspondientes a diferentes valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Entonces el sistema de vectores $u_1, \ldots, u_m$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = \mathbf{0}_V.$$

Notemos que $\alpha_j u_j \in W_j$, así que por el teorema $\alpha_j u_j = \mathbf{0}_V$. Como $u_j \neq \mathbf{0}_V$, concluimos que $\alpha_j = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. □

10. Corolario. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ diferentes valores propios de T. Denotemos

$$W_j = \ker(\lambda_j I - T), \qquad S = W_1 + \ldots + W_m.$$

Entonces S es suma directa de $W_1, \ldots, W_m$, esto es, cualquier vector de S se puede escribir de manera única como $u_1 + \ldots + u_m$ con $u_k \in W_k$.

11. Corolario. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ diferentes valores propios de T. Para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ sea $W_k = \ker(\lambda_k I - T)$ y sea $\mathcal{B}_k = (u_{k,1}, \ldots, u_{k,s_k})$ una base de W_k. Denotemos por $\mathcal{B}$ a la lista que se obtiene a juntar las listas $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de $W \coloneqq W_1 + \ldots + W_m$. En particular,

$$\dim(W) = \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_m).$$

Demostración. Supongamos que una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_k}\alpha_{k,j}u_{k,j} = \mathbf{0}_V.$$

Pongamos $w_k \coloneqq \sum_{j=1}^{s_k}\alpha_{k,j}u_{k,j}$. Entonces $w_k \in W_k$ y

$$\sum_{k=1}^{m} w_k = \mathbf{0}_V.$$

Como los subespacios $W_1, \ldots, W_m$ son linealmente independientes, para todo k tenemos $w_k = \mathbf{0}_V$, así que

$$\sum_{j=1}^{s_k}\alpha_{k,j}u_{k,j} = \mathbf{0}_V.$$

Luego recordamos que $\mathcal{B}_k$ es un sistema linealmente independiente y concluimos que todos los coeficientes $\alpha_{k,j}$ son iguales a cero. $\square$