Multiplicidades algebraica y geométrica de un valor propio

Objetivos. Conocer el concepto de subespacios invariantes. Definir la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de un valor propio. Demostrar que la multiplicidad geométrica siempre es menor o igual a la multiplicidad algebraica.

Requisitos. Multiplicidad de una raíz de un polinomio, subespacios, valores propios, subespacios propios, determinante de una matriz triangular por bloques.

En este tema estamos suponiendo que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

Subespacios invariantes

1. Definición (subespacio invariante de un operador lineal). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $W < V$. Se dice que W es un *subespacio invariante* de T si

$$T(W) \subset W,$$

esto es, si $T(v) \in W$ para cualquier $v \in W$.

2. Observación. Es fácil demostrar que la imagen de un subespacio bajo una transformación lineal también es un subespacio, por lo tanto la condición $T(W) \subset W$ es equivalente a la condición $T(W) < W$.

3. Subespacios invariantes triviales. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces $\{\mathbf{0}\}$ y V son subespacios invariantes de T.

4. Proposición (el núcleo de un operador lineal y sus subespacios son invariantes bajo este operador lineal). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

1. $\ker(T)$ es un subespacio invariante de T.
2. Si $S < \ker(T)$, entonces S es un subespacio invariante de T.
3. Si $u \in \ker(T)$, entonces $\ell(u)$ es un subespacio invariante de T.

5. Proposición (la imagen de un operador lineal y los subespacios que la contienen son invariantes bajo este operador lineal). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces:

1. $\operatorname{im}(T)$ es un subespacio invariante de T.
2. Si $S < V$ tal que $\operatorname{im}(T) < S$, entonces S es un subespacio invariante de T.

6. Proposición (subespacios invariantes de $\boldsymbol{T}$ y de $\boldsymbol{\lambda I - T}$). Sean $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces T y $U = \lambda I - T$ tienen los mismos subespacios invariantes.

Demostración. Sea W un subespacio invariante de T. Esto significa que para todo $w \in W$, $Tw \in W$. Entonces

$$Uw = (\lambda I - T)w = \lambda w - Tw \in W,$$

así que W es un subespacio invariante de U.

Por otro lado, sea W un subespacio invariante de U y sea $w \in W$. Entonces

$$Tw = \lambda w - (\lambda I - T)w = \lambda w - Uw \in W. \qquad \square$$

7. Proposición (subespacios propios son subespacios invariantes). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces el subespacio propio $S_{T,\lambda} \coloneqq \ker(\lambda I - T)$ y sus subespacios son invariantes bajo T. En particular:

- $\ker(\lambda I - T)$ es un subespacio invariante de T.
- Si u es un vector propio de T, entonces $\ell(u)$ es un subespacio invariante de T.
- Si $u_1, \ldots, u_k$ son vectores propios correspondientes a un valor propio, entonces $\ell(u_1, \ldots, u_k)$ es un subespacio invariante de T.

8. Definición (compresión de un operador lineal a un subespacio invariante). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea W un subespacio invariante de T. Consideremos la función

$$U \colon W \to W$$

definida por la regla

$$\forall x \in W \qquad U(x) \coloneqq T(x).$$

La definición es correcta: para todo $x \in W$ el vector $U(x)$ efectivamente está en W. La función U se llama la *compresión* del operador T al subespacio invariante W. Es fácil ver que U es lineal, así que $U \in \mathcal{L}(W)$.

9. Determinante de una matriz triangular superior por bloques (repaso). Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n-m}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_{n-m\times n-m}(\mathbb{F})$. Entonces se sabe que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{\times n-m,m} & C \end{bmatrix} = \det(A)\det(C).$$

10. Proposición (del polinomio característico de la compresión de un operador lineal a un subespacio invariante). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea W un subespacio invariante de T. Denotemos por U a la compresión de T al subespacio W:

$$U : W \to W, \qquad U(v) = T(v) \quad \forall v \in W.$$

Entonces C_U divide a C_T.

Demostración. Se sabe que toda base del subespacio se puede extender hasta una base del espacio. Pongamos $m \coloneqq \dim(W)$, $n \coloneqq \dim(V)$. Sea $\mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_m)$ una base de W y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m, \ldots, b_n)$ una base de V.

Como W es un subespacio invariante de T, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos que $Tb_j \in W = \ell(b_1, \ldots, b_m)$. Esto significa que las últimas $n - m$ componentes de Tb_j son cero, y la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es de la forma

$$T_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & C \end{array}\right],$$

donde $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{F})$.

Para calcular el polinomio característico de T consideramos la matriz

$$\lambda I_n - T_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_m - A & -B \\ \hline \mathbf{0}_{(n-m)\times m} & \lambda I_{n-m} - C \end{array}\right].$$

Esta matriz es triangular superior por bloques. Por lo tanto, su determinante es el producto de los determinantes de los bloques diagonales:

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = \det(\lambda I_n - T_{\mathcal{E}}) = \det(\lambda I_m - A)\det(\lambda I_{n-m} - C)$$

Notando que

$$U_{\mathcal{B}'} = A, \qquad \mathrm{C}_U(\lambda) = \det(\lambda I_m - A),$$

podemos escribir la igualdad anterior en forma

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = \mathrm{C}_U(\lambda)\det(\lambda I_{n-m} - C),$$

lo que implica que C_U divide a C_T. □

Multiplicidades algebraica y geométrica de un valor propio

11. Definición (multiplicidad algebraica). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. La *multiplicidad algebraica* de λ se define como la multiplicidad de la raíz λ del polinomio característico C_T, esto es, como

$$\max\bigl\{k \in \{1, \ldots, n\} : \quad (x - \lambda)^k \quad \text{divide a} \quad \mathrm{C}_T\bigr\}.$$

12. Definición (multiplicidad geométrica). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. La *multiplicidad geométrica* de λ se define como

$$\dim\bigl(S_{T,\lambda}\bigr).$$

13. Teorema (relación entre la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de un valor propio). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. Entonces la multiplicidad geométrica de λ es menor o igual a la multiplicidad algebraica de λ.

Demostración. Pongamos $W = \ker(\lambda I - T)$, $U \colon W \to W$, $U(x) = T(x)$. Entonces $U(x) = \lambda x$ y por eso

$$\mathrm{C}_U(x) = (x - \lambda)^k,$$

donde $k = \dim(W)$ es la multiplicidad geométrica de λ. Sabemos que C_U divide C_T. Por lo tanto, la multiplicidad de la raíz λ del polinomio C_T es mayor o igual a k. $\square$

14. Corolario (si la multiplicidad algebraica es 1, entonces la geométrica también es 1). Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ un valor propio de multiplicidad algebraica igual a 1. Entonces su multiplicidad geométrica también es igual a 1.

15. Ejemplos. Calcular los valores propios y sus multiplicidades algebraica y geométrica de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$