Matrices escalonadas y escalonadas reducidas

Objetivos. Estudiar las definiciones formales de matrices escalonadas y escalonadas reducidas. Comprender qué importancia tienen estas matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Demostrar que cada matriz se puede transformar en una matriz escalonada al aplicar operaciones elementales de renglones.

Requisitos. Notación para entradas de una matriz, operaciones elementales con renglones de una matriz.

Aplicaciones. Eliminación de Gauss, eliminación de Gauss–Jordan, solución de sistemas de ecuaciones lineales, cálculo del rango de matrices, construcción de bases del núcleo e imagen de transformaciones lineales.

Matrices escalonadas y escalonadas reducidas

1. Definición (matriz escalonada). Una matriz se llama *escalonada por renglones* o simplemente *escalonada* si cumple con las siguientes propiedades:

1. Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz.

2. El elemento delantero de cada renglón diferente de cero está a la derecha del elemento delantero diferente de cero del renglón anterior.

2. Ejemplos de matrices escalonadas. En cada renglón diferente de cero la primera entrada diferente de cero está marcada con el color verde.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-3} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{-3} & 4 & -2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \boxed{5} & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2/3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 4 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{bmatrix}.$$

3. Definición de matriz escalonada en términos de los números r y p_i. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Denotemos por r al número de los renglones no nulos de A:

$$r \coloneqq \left|\left\{i \in \{1,\ldots,m\}\colon\ A_{i,*} \neq \mathbf{0}\right\}\right|,$$

y en cada renglón no nulo denotemos por p_i al índice de la primera entrada no nula:

$$p_i \coloneqq \min\left\{j \in \{1,\ldots,n\}\colon\ A_{i,j} \neq 0\right\} \qquad (i \in \{1,\ldots,m\},\ A_{i,*} \neq \mathbf{0}).$$

La matriz A se llama *escalonada por renglones* (o simplemente *escalonada*) si cumple con las siguientes propiedades:

1. $A_{i,*} \neq \mathbf{0}$ para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$, $A_{i,*} = \mathbf{0}$ para todo $i > r$;
2. $p_1 < \ldots < p_r$.

4. Nota. Si la matriz A es escalonada, entonces sus entradas con índices (i, p_i), $1 \le i \le r$, se llaman *pivotes*.

5. Ejemplos de matrices escalonadas.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} r = 3,\ A_{1,*} \neq \mathbf{0},\ A_{2,*} \neq \mathbf{0},\ A_{3,*} \neq \mathbf{0},\ A_{4,*} = \mathbf{0}; \\ p_1 = 1,\ p_2 = 3,\ p_3 = 4, \quad p_1 < p_2 < p_3. \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} r = 2,\ A_{1,*} \neq \mathbf{0},\ A_{2,*} \neq \mathbf{0},\ A_{3,*} = \mathbf{0}; \\ p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_1 < p_2. \end{array}$$

6. Ejemplos de matrices no escalonadas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad r = 2, \quad \text{pero} \quad A_{2,*} = \mathbf{0}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad p_2 = p_3 = 2.$$

7. Ejercicio. ¿Cuáles de las siguientes matrices son escalonadas?.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Definición (matriz escalonada reducida). Una matriz se llama *escalonada reducida por renglones* o simplemente *escalonada reducida* si cumple con las propiedades 1 y 2 y además con las siguientes propiedades 3 y 4:

- En cada renglón no nulo el elemento delantero diferente de cero ("pivote") es igual a uno:
$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \qquad A_{i,p_i} = 0.$$
- Todos los elementos por encima de los pivotes son nulos:
$$\forall i \in \{2, \ldots, r\} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, i-1\} \qquad A_{k,p_i} = 0.$$

9. Ejemplos de matrices escalonadas reducidas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Ejemplo. Describir de manera explícita todas las matrices escalonadas reducidas en $\mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$.

Solución. Son las matrices de una de las siguientes formas, donde $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

11. Ejercicio. Describa de manera explícita todas las matrices escalonadas reducidas en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

12. Ejercicio. Describa de manera explícita todas las matrices escalonadas reducidas en $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Eliminación de Gauss

13. Proposición (eliminación de Gauss). Cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ se puede transformar en una matriz escalonada por renglones al aplicar operaciones elementales de tipos $R_p += \lambda R_q$ con $p > q$ y $R_p \leftrightarrow R_q$.

Demostración. Describamos un algoritmo que transforma la matriz dada A en una matriz escalonada. Este algoritmo se llama *eliminación de Gauss*. En el k-ésimo paso del algoritmo supongamos que:

i) las primeras $k-1$ filas son no nulas;

ii) los índices de los elementos delanteros en estas filas cumplen con la propiedad

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_{k-1},$$

iii) $A_{i,p_{k-1}} = 0$ para todo $i \ge k$.

Consideremos dos casos.

I. Todas las filas de A, a partir de la k-ésima, son nulas: $A_{i,j} = 0$ para todo $i \in \{k, \ldots, m\}$ y todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. En este caso $r = k-1$, y el algoritmo se termina.

II. Hay por lo menos una entrada no nula con índices i, j, $i \ge k$. Sean

$$q \coloneqq \min\bigl\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon \quad \exists i \in \{k, \ldots, m\} \quad A_{i,j} \neq 0\bigr\},$$

$$p \coloneqq \min\bigl\{i \in \{k, \ldots, m\} \colon A_{i,q} \neq 0\bigr\}.$$

La condición iii) garantiza que $p_k \coloneqq q > p_{k-1}$. Si $p \neq k$, apliquemos la operación elemental $R_k \leftrightarrow R_p$. Después de esta operación, $A_{k,q} \neq 0$.

Usando las operaciones elementales $R_i += \frac{A_{i,q}}{A_{k,q}} R_k$, eliminemos los elementos por debajo del elemento (k, q).

Ahora la matriz cumple con las propiedades i), ii), iii) con k en vez de $k-1$.

Continuando el proceso obtenemos una matriz escalonada. □

14. Sustitución hacia atrás en el método de Gauss. Toda matriz escalonada de filas se puede transformar en una matriz escalonada reducida de filas al aplicar operaciones elementales de forma $R_q += \lambda R_p$, donde $q < p$.

15. Eliminación de Gauss-Jordan. En el k-ésimo paso se eliminan no sólo los elementos A_{i,p_k} con $i > k$, sino también A_{i,p_k} con $i < k$.

16. Proposición. Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ se puede transformar en una matriz escalonada reducida por filas al aplicar operaciones elementales de tipos $R_p += \lambda R_q$ y $R_p \leftrightarrow R_q$.

17. Tarea adicional. Escriba un programa que realice la eliminación de Gauss.

18. Ejemplo. Transformemos la siguiente matriz a una matriz escalonada:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix}.$$

Apliquemos el método de Gauss. Cada vez eligimos como pivote al elemento el más izquierdo y el más alto. En el primer paso usamos como pivote el elemento $A_{1,1} = 3$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 -= R_3]{\substack{R_2 += \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 -= \frac{5}{3}R_1}} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix}.$$

En el segundo paso tenemos que intercambiar dos filas.

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 -= R_2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 15 \end{bmatrix}.$$

Y un paso más:

$$\xrightarrow{R_4 - 5R_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora la matriz es escalonada, $r = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices son escalonadas reducidas

19. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz es escalonada reducida. Podemos utilizar la primera ecuación para despejar la incógnita x_1, la segunda ecuación para despejar x_3 y la tercera para x_4:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 2x_2 & - & 5x_5 & - & 3; \\ x_3 & = & & & 2x_5 & + & 4; \\ x_4 & = & & & -4x_5 & + & 2. \end{array}\right.$$

La solución general es

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 - 5x_5 - 3 \\ x_2 \\ 2x_5 + 4 \\ -4x_5 + 2 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$