Base dual

Objetivos. Dada una base en un espacio vectorial de dimensión finita, definir su base dual en el espacio de funcionales lineales. Estudiar la representación matricial de funcionales lineales.

Requisitos. Funcionales lineales, base de un espacio vectorial, coordenadas de un vector en una base, representación matricial de una transformación lineal.

1. Teorema (de la base dual). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ denotemos por χ_i al funcional cuyo valor en un vector $v \in V$ es igual a la i-ésima coordenada del vector v con respecto a la base $\mathcal{A}$:

$$\chi_i(v) = \big(v_{\mathcal{A}}\big)_i.$$

En otras palabras, si $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$, entonces

$$\chi_i(v) = \lambda_i.$$

Entonces:

1. Se tiene la siguiente relación entre los vectores a_j y los funcionales χ_i:

$$\chi_i(a_j) = \delta_{i,j} \qquad (i, j \in \{1, \ldots, n\}) \tag{1}$$

2. Todo funcional $\psi \in V^*$ se escribe como una combinación lineal de los funcionales $\chi_1, \ldots, \chi_n$ de la siguiente manera:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(a_i)\chi_i. \tag{2}$$

3. $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ es una base del espacio V^*.

La base $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ del espacio V^* definida en este teorema es llamada la *base dual* a la base $\mathcal{A}$.

Demostración. 1. Sabemos que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ el vector a_j se puede escribir en forma $a_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$ con $\lambda_k = \delta_{k,j}$. Por definición de χ_i obtenemos que

$$\chi_i(a_j) = \lambda_i = \delta_{i,j}.$$

2. Probemos la fórmula (2). Al funcional en el lado derecho de (2) lo denotemos por χ. Entonces para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ calculamos $\chi(a_j)$ usando la definición de las operaciones lineales en V^*:

$$\chi(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \psi(a_i)\chi_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \psi(a_i)\delta_{i,j} = \psi(a_j).$$

Esto quiere decir que los funcionales χ y ψ coinciden en los vectores de la base $\mathcal{A}$. De allí sigue fácilmente que $\chi(v) = \psi(v)$ para todo $v \in V$. En efecto, escribir v como $v = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j$ y aplicamos la linealidad de χ y ψ:

$$\chi(v) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi(a_j) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \psi(a_j) = \psi(v). \qquad \square$$

3. La fórmula (2) muestra que todo funcional $\psi \in V^*$ es una combinación lineal de los funcionales $\chi_1, \ldots, \chi_n$, así que $\ell(\chi_1, \ldots, \chi_n) = V^*$. Falta demostrar que los vectores (funcionales) $\chi_1, \ldots, \chi_n$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_i = \mathbf{0}.$$

Denotemos al lado izquierdo por ψ y notemos que ψ es un funcional lineal. Apliquemos ψ al vector a_j, donde $j \in \{1, \ldots, n\}$ es un índice arbitrario. Por un lado $\psi(a_j) = \mathbf{0}(a_j) = 0$. Por otro lado, usamos la definición de las operaciones lineales en V^* y la fórmula (1):

$$\psi(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{i,j} = \beta_j.$$

Hemos mostrado que $\beta_j = 0$ para todo j, así que los funcionales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son linealmente independientes.

2. Observación (coordenadas de un funcional lineal respecto la base dual). La fórmula (2) significa que los escalares $\psi(a_j)$ son coordenadas del funcional ψ en la base dual $\Phi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$:

$$\psi_\Phi = \begin{bmatrix} \psi(a_1) \\ \ldots \\ \psi(a_n) \end{bmatrix}.$$

3. Ejemplo: base dual a la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Sea $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y sea $\Phi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ la base dual asociada a $\mathcal{E}$. Entonces

$$\chi_k(x) = x_k \qquad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

Por ejemplo,

$$\text{si} \quad x = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \varphi_3(x) = 7.$$

4. Ejemplo: coordenadas de un funcional respecto a la base dual a la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Consideremos un funcional lineal en $\mathbb{R}^4$:

$$\psi(x) = 2x_1 - 6x_2 + x_4.$$

Hallemos las coordenadas de ψ respecto Φ, donde $\Phi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$. Primero calculamos los valores de ψ en los vectores e_1, e_2, e_3, e_4:

$$\psi(e_1) = 2, \quad \psi(e_2) = -6, \quad \psi(e_3) = 0, \quad \psi(e_4) = 4.$$

De allí

$$\psi = 2\chi_1 - 6\chi_2 + \chi_4, \qquad \text{esto es,} \qquad \psi_\Phi = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Ejemplo: base dual a la base canónica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Sea $e_0, \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Denotemos por $\chi_0, \ldots, \chi_n$ a los elementos de la base dual. Entonces $\chi_k(f)$ es el coeficiente de la potencia x^k en el polinomio $f(x)$:

$$\chi_k(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n) = \alpha_k.$$

6. Ejercicio: base dual a la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sea $\mathcal{E} = (E_{p,q})_{1 \le p,q \le 2}$ la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Denotemos por $\chi_{p,q}$ a los funcionales de la base dual a $\mathcal{E}$. Calcular:

$$\chi_{2,1} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \chi_{2,2} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Representación matricial de un funcional lineal

7. Proposición (representación matricial de un funcional lineal). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Denotemos por Φ a la base dual asociada a $\mathcal{A}$. Entonces para todo $\psi \in V^*$,

$$\psi(v) = \psi_\Phi^\top v_\mathcal{A} \qquad \forall v \in V.$$

8. Proposición (unicidad de la representación matricial de un funcional lineal). Sea V un EV/$\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V, y sea $\Phi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ la base dual a $\mathcal{A}$. Supongamos que $\psi \in V^*$, $c \in \mathbb{F}^n$ y para todo $v \in V$

$$\psi(v) = c^\top v_\mathcal{A}.$$

Entonces $\psi_\Phi = c$.

Idea de la demostración. Para demostrar que coinciden las j-ésimas componentes de ψ_Φ y c, poner $v = a_j$ en la igualdad $\psi_\Phi^\top v_\mathcal{A} = c^\top v_\mathcal{A}$. $\square$

9. Ejemplo. $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$, $\psi(x) = 3x_1 - 4x_2 + 7x_3$. Entonces $\psi = 3\chi_1 - 4\chi_2 + 7\chi_3$, esto es,

$$\psi_\Phi = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

10. Ejercicio: traza de matrices. Exprese tr como una combinación lineal de los elementos de la base dual a la base canónica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

11. Ejemplo: funcional de evaluación de polinomios en un punto. Sea $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ la base canónica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y sea $\Phi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$ la base dual asociada a $\mathcal{E}$. Entonces

$$\mathrm{eval}_5 = \chi_0 + 5\chi_1 + 25\chi_2 + 125\chi_3,$$

así que

$$(\mathrm{eval}_5)_\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \\ 125 \end{bmatrix}.$$

12. Ejercicio. Calcule ψ_Φ, donde $\psi \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})^*$, $\quad \psi(f) = 2f'(-3) + 5f(1)$.

13. Ejercicio. Calcule ψ_Φ, donde $\psi \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})^*$, $\quad \psi(f) = \int\limits_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

14. Ejercicio. Calcule ψ_Φ, donde Φ es la base dual a la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$,

$$\psi(X) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. Cambio de las coordenadas de un funcional lineal al cambiar la base del espacio. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ bases de un espacio vectorial V y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ las bases duales correspondientes. Entonces para todo $\varphi \in V^*$ se tiene:

$$\varphi_{\mathcal{F}'} = P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}^\top \varphi_{\mathcal{F}},$$

donde $P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ es la matriz de transición.

Demostración. Para todo $v \in V$ se tiene:

$$\varphi_{\mathcal{F}'}^\top v_{\mathcal{A}'} = \varphi(v) = \varphi_{\mathcal{F}}^\top v_{\mathcal{A}} = \varphi_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} v_{\mathcal{A}'} = \left(P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}^\top \varphi_{\mathcal{F}}\right)^\top v_{\mathcal{A}'}.$$

Por la unicidad de representación matricial de funcionales lineales, $\varphi_{\mathcal{F}'} = P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}^\top \varphi_{\mathcal{F}}$. $\square$