Demostraciones de algunas propiedades simples de divisibilidad (ejercicios)

1. Ejemplo. Sean $m, s \in \mathbb{Z}$ tales que $8 \mid m$ y $m \mid s$. Demostrar que $8 \mid s$.

Demostración. La suposición $8 \mid m$ significa que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

La hypótesis $m \mid s$ significa que existe un $j \in \mathbb{Z}$ tal que $s = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

De estas dos igualdades obtenemos

$$s = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 8 \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Hemos encontrado un entero $d = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$ tal que $s = 8d$.

Con esto hemos demostrado que $8 \mid s$. □

2. Ejercicio. Sean $x, z \in \mathbb{Z}$ tales que $15 \mid x$ y $x \mid z$. Demuestre que $15 \mid z$.

3. Problema. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a \mid b$ y $b \mid c$. Demuestre que $a \mid c$.

Sugerencia: la demostración es muy similar a dos razonamientos anteriores. Intente de escribir esta demostración en otra hoja de papel sin consultar los razonamientos escritos arriba.

4. Ejemplo. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $20 \mid m$ y $20 \mid n$. Demostrar que $20 \mid (m+n)$.

Demostración. La hipótesis $20 \mid m$ significa que existe un $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

La hipótesis $20 \mid n$ significa que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Sumando estas dos igualdades obtenemos

$$m + n = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} = 20\,\big(\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}\big).$$

Hemos encontrado un entero $q = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}$ tal que $m + n = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$. $\square$

5. Ejercicio. Sean $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $12 \mid r$ y $12 \mid s$. Demuestre que $12 \mid (r+s)$.

6. Problema. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a \mid b$ y $a \mid c$. Demuestre que $a \mid (b+c)$.

7. Ejemplo. Sean $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $9 \mid u$ y $9 \mid v$. Demostrar que $9 \mid (5u - 11v)$.

Demostración. Las condiciones $9 \mid u$ y $9 \mid v$ significan que existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$u = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \qquad v = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

De aquí

$$\begin{aligned} 5u - 11v &= 5\big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\big) - 11\big(\underbrace{\qquad\quad}_{?}\big) \\ &= 5 \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \cdot \underbrace{\qquad}_{?} + (-11) \cdot \underbrace{\qquad}_{?} \cdot \underbrace{\qquad}_{?} = 9\big(\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}\big). \end{aligned}$$

Hemos encontrado un entero $k = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$ tal que $5u - 11v = 9k$.

Con esto hemos demostrado que $9 \mid (5u - 11v)$. $\square$

8. Ejercicio. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $26 \mid m$ y $26 \mid n$. Demuestre que $26 \mid (-4m + 7n)$.

9. Problema. Sean $d, a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $d \mid a$ y $d \mid b$. Demuestre que $d \mid (ax + by)$.

10. Ejercicio. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $(-5) \mid a$, $(-5) \mid b$, $(-5) \mid c$. Demuestre que

$$(-5) \mid (4a - 6b + 7c).$$

11. Ejercicio. Sean $n, x, y, z, a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $n \mid x$, $n \mid y$, $n \mid z$. Demuestre que

$$n \mid (ax + by + cz).$$

12. Ejemplo. Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $(-7) \mid x$ y $x \neq 0$. Demostrar que $7 \leqslant |x|$.

Demostración. La condición $(-7) \mid x$ significa que existe un $j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}. \tag{1}$$

Notamos que j no puede ser 0. En realidad, si j fuera 0, entonces por la igualdad (1) obtendríamos que $x = \underbrace{\qquad}_{?}$ lo que contradiría a la hipótesis $x \neq 0$. Entonces $j \neq 0$.

Como j es entero y $j \neq 0$, concluimos que $|j|$ también es entero y $|j| > 0$. Entonces $|j| \geqslant 1$.

Ahora en la igualdad (1) pasamos a valores absolutos y luego usamos la desigualdad $|j| \geqslant 1$:

$$|x| = \Big|\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\Big| = |-7|\,\Big|\underbrace{\qquad}_{?}\Big| = 7\,\Big|\underbrace{\qquad}_{?}\Big| \geqslant 7.$$

Hemos demostrado que $|x| \geqslant 7$. □

13. Ejercicio. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $6 \mid m$. Demuestre que $|m| \geqslant 6$.

14. Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $b \neq 0$ y $a \mid b$. Entonces $|a| \leqslant |b|$.

Demostración. La condición $a \mid b$ significa que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}. \tag{2}$$

Notamos que $k \neq 0$. En efecto, si razonamos por contradicción y suponemos $k = 0$, entonces de la igualdad (2) obtenemos $b = \underbrace{\qquad}_{?}$, lo que contradice a una de las hipótesis del teorema.

Como k es entero y $k \neq 0$, tenemos que $|k|$ también es entero y $|k| > 0$. Entonces $|k| \geqslant 1$. Ahora en la igualdad (2) pasamos a valores absolutos y luego utilizamos la desigualdad $|k| \geqslant 1$:

$$|b| = |\underbrace{\qquad\qquad}_{?}| = |\underbrace{\qquad}_{?}|\,|\underbrace{\qquad}_{?}| \geqslant 1 \cdot |\underbrace{\qquad}_{?}| = |\underbrace{\qquad}_{?}|.$$

Hemos demostrado que $|b| \geqslant \underbrace{\qquad}_{?}$. □

15. Ejercicio. Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \mid x$. Demuestre que $x = 0$.

16. Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \mid b$ y $b \mid a$. Entonces $a = b$ o $a = -b$.

Demostración. I. Primero consideremos el caso cuando alguno de los números a, b es cero.

Si $a = 0$, entonces de la condición $a \mid b$ se sigue que $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

Si $b = 0$, entonces de la condición $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$ se sigue que $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

Resumiendo: si alguno de los números a, b es cero, entonces el otro también, y en este caso $a = b$.

II. Ahora consideremos el caso cuando $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Como $a \neq 0$ y $b \mid a$, por el Teorema 14 obtenemos $|b| \leqslant |a|$.

Como $b \neq 0$ y $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$, por el Teorema 14 obtenemos $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

De estas dos desigualdades se sigue que $|a| = |b|$, pero esto es posible solamente si $a = b$ o $a = -b$. □