Divisibilidad de números enteros
(ejercicios muy simples para resolver en casa)

1. Números enteros. Denotamos el conjunto de todos los números enteros por $\mathbb{Z}$. Los números 5, -148, 0, 10^9, $\frac{6}{3}$ pertenecen a este conjunto (en otras palabras, son enteros):

$$5 \in \mathbb{Z}, \qquad -148 \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \in \mathbb{Z}, \qquad 10^9 \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{Z}.$$

Los números $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$, π no pertenecen a este conjunto (no son enteros):

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}, \qquad \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}, \qquad \pi \notin \mathbb{Z}.$$

Indique cuáles de los siguientes números son enteros:

$$7, \qquad -\frac{5}{2}, \qquad 1.6, \qquad -3, \qquad \frac{-8}{2}, \qquad \sqrt{5}.$$

Escriba la respuesta de manera más detallada, usando los símbolos $\in$ o $\notin$:

$$7 \underbrace{\qquad}_{\in \text{ ó } \notin} \mathbb{Z}, \qquad -\frac{5}{2} \underbrace{\qquad}_{\in \text{ ó } \notin} \mathbb{Z}, \qquad 1.6$$

$$-3 \qquad\qquad \frac{-8}{2} \qquad\qquad \sqrt{5}$$

2. Valor absoluto de un número entero. Dado un número entero a, denotamos por $|a|$ su *valor absoluto* (también llamado el *módulo* de a):

$$|-7| = 7, \qquad |5| = 5, \qquad |0| = 0, \qquad |-673| = 673, \qquad |10| = 10.$$

La definición formal:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Escriba los valores absolutos de los siguientes números enteros:

$$|-8| = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad |0| = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad |6| = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Encuentre $|-a|$, si $a = -4$:

$$|-a| = \underbrace{\qquad\quad}_{?}$$

3. Divisibilidad de números enteros: ejemplo. Notamos que $20 = 10 \cdot 2$. Se dice que 20 es un *múltiplo entero* de 10, y 10 es un *divisor entero* de 20. También se dice que 20 *se divide* entre 10.

4. Divisibilidad de números enteros: definición formal. Sean m y n algunos números enteros. Se dice que m divide a n si existe un número entero k tal que $n = mk$.

5. Divisibilidad de números enteros: definición formal escrita con símbolos. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$.

$$m \mid n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \qquad n = mk.$$

6. Ejemplos.

- $14 \mid 42$ porque $42 = 14 \cdot 3$.
- $-5 \mid 10$ porque $10 = (-5) \cdot (-2)$.
- $1 \mid 6$ porque $6 = 1 \cdot 6$.
- $3 \nmid 10$ porque no existe ningún k entero tal que $10 = 3k$.

7. Ejercicios. Ponga los símbolos "divide" y "no divide" de manera correcta:

$5 \quad (-15)$	$15 \quad 5$	$6 \quad 9$
$20 \quad 4$	$(-4) \quad 20$	$1 \quad 7$

8. El conjunto de los divisores enteros de un número entero.
El conjunto de los divisores enteros del número 10 es

$$\{d \in \mathbb{Z}\colon \quad d \mid 10\} = \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}.$$

Encuentre el conjunto de los divisores enteros del número 14:

$$\{d \in \mathbb{Z}\colon \quad d \mid 14\} = \{ \qquad , \qquad , \qquad , \qquad , \qquad , \qquad , \qquad \}.$$

El conjunto de los divisores enteros del número 18 es

$$\{d \in \mathbb{Z}\colon \quad d \mid 18\} = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Halle el conjunto de los divisores enteros del número 12:

$$\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}.$$

Otro par de ejercicios:

$$\{d \in \mathbb{Z}\colon \quad d \mid 5\} =$$

$$\{d \in \mathbb{Z}\colon \quad d \mid -5\} =$$

9. El conjunto de los múltiplos enteros de un número entero.
El conjunto de los múltiplos enteros del número 6 es infinito:

$$\{n \in \mathbb{Z}\colon \quad 6 \mid n\} = \{\ldots, -30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}.$$

Para obtener un conjunto finito, pongamos la restricción $|n| \le 20$:

$$\{n \in \mathbb{Z}\colon \quad 6 \mid n \quad \wedge \quad |n| \le 20\} = \{-18, -12, -6, 0, 6, 12, 18\} = \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18\}.$$

Encuentre el conjunto de los múltiplos enteros de 7 cuyos valores absolutos son menores o iguales a 30:

$$\{n \in \mathbb{Z}\colon \quad 7 \mid n \quad \wedge \quad |n| \le 30\} =$$

10. Los divisores comunes de dos números enteros (ejemplo). El conjunto de los divisores enteros del número 18 es

$$\{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

El conjunto de los divisores enteros del número 24 es

$$\{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Escribamos el conjunto de los *divisores comunes* de 18 y 24, es decir, el conjunto de los números enteros que dividen tanto a 18 como a 24. Es la intersección de los dos conjuntos escritos arriba:

$$\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}.$$

El *máximo común divisor* de 18 y 24 es el número 6:

$$\operatorname{mcd}(18, 24) = 6.$$

11. Los divisores comunes de dos números enteros (ejercicio). El conjunto de los divisores enteros del número 25 es

El conjunto de los divisores enteros del número 35 es

El conjunto de los *divisores comunes* de 25 y 35 es

El *máximo común divisor* de 25 y 35 es

$$\operatorname{mcd}(25, 35) = \underbrace{\qquad}_{?}$$

12. Ejemplo de demostración muy simple. Demostrar que $(-3) \mid 18$.

Solución. Por la definición de divisibilidad, tenemos que encontrar un número entero k tal que $18 = (-3) \cdot k$. Obviamente el número $k = -6$ puede hacer este papel. $\square$

La misma demostración en una forma más breve.

$$18 = (-3) \underbrace{(-6)}_{\in \mathbb{Z}}. \qquad \square$$

13. Ejercicio. Demuestre que $(-4) \mid (-20)$.

14. Ejemplo de demostración simple. Sea n un número entero tal que $12 \mid n$. Demostrar que $(-3) \mid n$.

Solución. Sabemos que existe un k entero tal que

$$n = 12k.$$

Usando el hecho que $12 = (-3)(-4)$ escribimos la igualdad anterior como

$$n = (-3)(-4)k.$$

Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación de números enteros podemos agrupar los factores de la siguiente manera:

$$n = (-3)(-4k).$$

Notemos que $-4k \in \mathbb{Z}$. Resumen: hemos encontrado un número entero $m = -4k$ tal que $n = (-3)m$. Por lo tanto, $(-3) \mid n$. $\square$

15. Ejercicio. Sea n un número entero tal que $(-10) \mid n$. Demuestre que $5 \mid n$.