Suma directa de subespacios

Objetivos. Estudiar la definición y el criterio de la suma directa, conocer ejemplos.

Requisitos. Suma e intersección de subespacios de un espacio vectorial.

1. Definición (suma directa). Sean V un espacio vectorial, S_1 y S_2 subespacios de V. Se dice que V es la *suma directa* de S_1 y S_2 si para cualquier $v \in V$ existe un único par ordenado (u, w) tal que $u \in S_1$, $w \in S_2$ y $v = u + w$:

$$\forall v \in V \qquad \exists!(u, w) \in S_1 \times S_2 \quad v = u + w.$$

2. Teorema (criterio de suma directa). Sea V un espacio vectorial y sean S_1 y S_2 subespacios de V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) V es la suma directa de S_1 y S_2, esto es,

$$\forall v \in V \qquad \exists!(u, w) \in S_1 \times S_2 \qquad v = u + w.$$

(b) $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que V es la suma directa de S_1 y S_2. Entonces en particular tenemos que para todo $v \in V$ *existen* $u \in S_1$ y $w \in S_2$ tales que $v = u + w$. Esto significa que $V \subset S_1 + S_2$. Pero $S_1 + S_2$ es un subconjunto de V. Por eso $V = S_1 + S_2$.

Demostremos que $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. Supongamos que $a \in S_1 \cap S_2$. Entonces

$$a = \underbrace{a}_{\substack{\Cap \\ S_1}} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\substack{\Cap \\ S_2}} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\substack{\Cap \\ S_1}} + \underbrace{a}_{\substack{\Cap \\ S_2}}.$$

Pero la definición de suma directa dice que la representación de a en forma $u + w$ con $u \in S_1$, $w \in S_2$ es *única*. Por eso $a = \mathbf{0}$.

(b)$\Rightarrow$(a). Supongamos que $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. Vamos a demostrar que V es la suma directa de S_1 y S_2. Como $V = S_1 + S_2$, para todo $v \in V$ *existe* un par $(u, w) \in S_1 \times S_2$ tal que $v = u + w$. Sólo falta demostrar que este par es *único*. Supongamos que

$$u \in S_1,\ w \in S_2,\ u + w = v, \qquad \text{y también} \qquad u' \in S_1,\ w' \in S_2,\ u' + w' = v.$$

Entonces $u + w = u' + w'$, $u - u' = w' - w$. Pero

$$u - u' = u + (-1)u' \in S_1, \qquad w' - w = w' + (-1)w \in S_2.$$

Así que $u - u' \in S_1 \cap S_2$. Por la hipótesis, $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. Por eso $u - u' = \mathbf{0}$, $u = u'$, $w = w'$. $\square$

3. Observación. Algunos autores definen la suma directa por la condición (b). La condición (a) es más cómoda para generalizarla al caso de varios subespacios.

4. Ejemplo. Demostrar que el espacio $\mathbb{F}^3$ es la suma directa de los siguientes dos subespacios:

$$S_1 \coloneqq \left\{x \in \mathbb{F}^3\colon\ x_2 = 0\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} :\ x_1, x_3 \in \mathbb{F} \right\} = \ell(e_1, e_3);$$

$$S_2 \coloneqq \left\{x \in \mathbb{F}^3\colon x_1 = x_3 = 0\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} :\ x_2 \in \mathbb{F} \right\} = \ell(e_2).$$

5. Ejemplo. En el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ denotemos por S_1 al subespacio que consiste en todas las matrices simétricas y por S_2 al subespacio que consiste en todas las matrices antisimétricas. Demuestre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la suma directa de S_1 y S_2.

6. Ejemplo. Denotemos por $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ al espacio vectorial real de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Denotemos por S_1 y S_2 a dos subespacios de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ que consisten en las funciones pares e impares, respectivamente:

$$S_1 \coloneqq \left\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})\colon\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = f(x)\right\};$$
$$S_2 \coloneqq \left\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})\colon\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\right\}.$$

Demuestre que $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es la suma directa de S_1 y S_2.