Dimensión

Objetivos. Definir la dimensión de un espacio vectorial y espacios vectoriales de dimensión finita.

Requisitos. Base de un espacio vectorial, sublista básica de una lista de vectores, teorema fundamental de las dependencias lineales.

1. Nota. Según nuestras definiciones, una base siempre es una lista *finita*. En algunos cursos avanzados se consideran bases infinitas y conjuntos generadores infinitos, pero nosotros siempre usamos las palabras "base" y "lista generador" para listas *finitas*.

2. Teorema fundamental de las dependencias lineales (repaso). Sean V un espacio vectorial, $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ una lista de elementos de V y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una lista de vectores tales que $b_1, \ldots, b_n \in \ell(\mathcal{A})$. Si además $n > m$, entonces $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente. Forma contrapositiva: si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, entonces $n \leq m$.

3. Proposición (sobre los tamaños de bases). Si existe una base del espacio vectorial V, entonces todas las bases de V tienen el mismo tamaño.

Demostración. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de V. Como $\mathcal{B}_1 \subset \ell(\mathcal{B}_2)$ y $\mathcal{B}_1$ es linealmente independiente, por el teorema fundamental de las dependiencias lineales se tiene que $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$. De manera similar se muestra que $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$. □

4. Definición (dimensión de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Si existe una base en V, entonces se dice que el espacio V es *de dimensión finita*. En este caso el tamaño de la base se llama la *dimensión* de V y se denota por $\dim(V)$. La proposición anterior muestra que esta definición es correcta.

5. Ejemplos.

- $\dim(\mathbb{F}^n) = n$.
- $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{F})) = n + 1$.
- $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})) = mn$.
- $\dim(V^2(O)) = 2$.
- $\dim(V^3(O)) = 3$.

6. Proposición (criterio de un espacio de dimensión finita). Sea V un EV/$\mathbb{F}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe una base (finita) en V;

(b) existe una lista (finita) que genera al espacio V;

(c) el tamaño de listas linealmente independientes en V es acotado.

Idea de la demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Si $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces, en particular, $\ell(\mathcal{B}) = V$.

(b)$\Rightarrow$(a). Sea $\mathcal{A}$ una lista tal que $\ell(\mathcal{A}) = V$. Elijamos en $\mathcal{A}$ una sublista básica $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\ell(\mathcal{B}) = \ell(\mathcal{A}) = V$, así que $\mathcal{B}$ es una base de V.

(a)$\Rightarrow$(c). Sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $\mathcal{A}$ es una lista linealmente independiente. Como todos los elementos de $\mathcal{A}$ perteneces a $\mathcal{B}$, el teorema principal de las dependencias lineales garantiza que $|\mathcal{A}| \le |\mathcal{B}|$.

(c)$\Rightarrow$(a). Supongamos que el tamaño de listas linealmente independientes en V es acotado. Denotemos por n al tamaño máximo. Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una lista linealmente independiente de este tamaño. Entonces para cualquier vector $v \in V$ la lista extendida $\mathcal{B} \sqcup v = (b_1, \ldots, b_n, v)$ debe ser linealmente dependiente. Recordando que la lista $\mathcal{B}$ era linealmente independiente concluimos que el vector agregado v es una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$. Con esto acabamos de demostrar que $\ell(\mathcal{B}) = V$. $\square$

7. Dimensión en términos de sistemas linealmente independientes y sistemas generadores. Si E es de dimensión finita, entonces:

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \text{tamaño de una base de } V \text{ (por definición)}\\ &= \text{tamaño máximo de las listas linealmente independientes en } V\\ &= \text{tamaño mínimo de las listas de vectores que generan a } V.\end{aligned}$$

8. Criterio de una base en el espacio de dimensión n. Sean V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita n, $\mathcal{A}$ una lista de vectores en V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{A}$ es una base de V;

(b) $\mathcal{A}$ es linealmente independiente y $|\mathcal{A}| = n$;

(c) $\mathcal{A}$ genera a V y $|\mathcal{A}| = n$.

9. Dimensión del espacio nulo. En el espacio $\{\mathbf{0}\}$ la única lista linealmente independiente es la vacía que denotamos por $\emptyset$. Esta lista genera a $\{\mathbf{0}\}$ porque $\mathbf{0}$ se puede considerar como una suma de 0 sumandos. Por lo tanto, $\emptyset$ es una base de $\{\mathbf{0}\}$ y $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.