Relación entre las dimensiones de la suma y de la intersección de subespacios vectoriales (fórmula de Grassmann)

Objetivos. Demostrar que para cualesquiera subespacios S_1 y S_2 de un espacio vectorial V de dimensión finita, las dimensiones de S_1, S_2, $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$ están relacionadas mediante la siguiente *fórmula de Grassmann*:

$$\dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2).$$

Requisitos. Suma e intersección de subespacios vectoriales, base y dimensión, teorema de ampliación de una lista linealmente independiente a una base.

1. Repaso (base y dimensión de un subespacio). Sean V un EV de dimensión finita, S un subespacio de V y $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$ una base de S. Recordamos que:

- $\mathcal{A}$ es linealmente independiente.
- $\mathcal{A}$ se puede ampliar hasta una base $\mathcal{B} = (a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_n)$ del espacio V.
- $\dim(S) \leq \dim(V)$.

2. Repaso (suma e intersección de subespacios). Dados dos subespacios S_1 y S_2 de un EV V, la *suma* y la *intersección* de S_1 y S_2 se definen mediante las fórmulas:

$$S_1 + S_2 := \{c \in V \colon\ \exists a \in S_1\ \exists b \in S_2 \quad c = a + b\};$$
$$S_1 \cap S_2 := \{v \in V \colon v \in S_1\ \wedge\ v \in S_2\}.$$

Ya hemos demostrado (o mencionado) que $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$ son subespacios de V.

3. Teorema (relación entre las dimensiones de la suma e intersección, fórmula de Grassmann). Sean V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita, S_1 y S_2 subespacios de V. Entonces

$$\boxed{\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).}$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_p)$ una base de $S_1 \cap S_2$. Extendemos $\mathcal{A}$ a una base de S_1:

$$(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q).$$

Por otro lado, extendemos $\mathcal{A}$ a una base de S_2:

$$(a_1, \ldots, a_p, c_1, \ldots, c_r).$$

Consideramos la lista de vectores

$$\mathcal{G} \coloneqq (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, c_1, \ldots, c_r).$$

Demostremos que $\mathcal{G}$ es una base de $S_1 + S_2$. Es fácil ver que $\ell(\mathcal{G}) = S_1 + S_2$:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \ell(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) + \ell(a_1, \ldots, a_p, c_1, \ldots, c_r) \\ &= \ell(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, a_1, \ldots, a_p, c_1, \ldots, c_r) = \ell(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, c_1, \ldots, c_r). \end{aligned}$$

Falta demostrar que $\mathcal{G}$ es linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j b_j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k c_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Pasamos la tercera suma al lado derecho y denotamos este vector por v:

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j b_j = -\sum_{k=1}^{r} \gamma_k c_k.$$

De aquí vemos que $v \in S_1$ y $v \in S_2$, así que $v \in S_1 \cap S_2$. Por lo tanto, v se puede escribir como una combinación lineal de $\mathcal{A}$:

$$v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i.$$

Comparando con lo anterior obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k c_k = 0.$$

Como $(a_1, \ldots, a_p, c_1, \ldots, c_r)$ es una base,

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0, \qquad \gamma_1 = \ldots = \gamma_r = 0.$$

Ahora podemos simplificar (1):

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j b_j = \mathbf{0}.$$

Como la lista $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$ es linealmente independiente todos los coeficientes son cero. Acabamos de demostrar que $\mathcal{G}$ es una base de V. De aquí sigue que

$$\dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) = p + q + r + p = (p + q) + (p + r) = \dim(S_1) + \dim(S_2). \quad \square$$

4. Corolario. Sean V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita, S_1 y S_2 subespacios de V. Entonces

$$\dim(S_1 + S_2) \leq \dim(S_1) + \dim(S_2).$$

5. Ejemplo. En el espacio $V^3(O)$ consideremos dos planos Π_1 y Π_2 tales que $O \in \Pi_1$ y $O \in \Pi_2$. Entonces Π_1 y Π_2 son subespacios de $V^3(O)$, $\dim(\Pi_1) = \dim(\Pi_2) = 2$. Como $\dim(\Pi_1 + \Pi_2) \leq 3$, la fórmula del teorema implica que $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) \geq 1$.