Nulidad y rango de una transformación lineal

Objetivos. Definir la nulidad y el rango de una transformación lineal. Demostrar el teorema que relaciona la nulidad con el rango.

Requisitos. Transformación lineal, núcleo e imagen de una transformación lineal, base, ampliación de una lista de vectores linealmente independientes a una base.

1. Definición (rango de una transformación lineal). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. El *rango* de T se define como la dimensión de la imagen de T:

$$\mathrm{r}(T) = \dim(\mathrm{im}(T)).$$

2. Definición (nulidad de una transformación lineal). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. La *nulidad* de T se define como la dimensión del núcleo de T:

$$\mathrm{nul}(T) = \dim(\ker(T)).$$

3. Teorema de la nulidad y el rango de una transformación lineal. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\dim(\mathrm{im}(T)) < +\infty$ y

$$\mathrm{nul}(T) + \mathrm{r}(T) = \dim(V), \tag{1}$$

esto es,

$$\dim(\mathrm{im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V).$$

Demostración. Sea $u_1, \ldots, u_d$ una base de $\ker(T)$. Los vectores $u_1, \ldots, u_d$ son linealmente independientes y el espacio V es de dimensión finita, por lo tanto existen vectores $a_1, \ldots, a_r \in V$ tales que la lista $u_1, \ldots, u_d, a_1, \ldots, a_r$ es una base de V. Para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$ pongamos

$$b_j = T(a_j).$$

Vamos a demostrar que $b_1, \ldots, b_r$ es una base de $\mathrm{im}(T)$. Con eso obtendremos la igualdad (1) porque $d + r = \dim(V)$.

1. Mostremos que $\ell(b_1, \ldots, b_r) = \mathrm{im}(T)$. Sea $w \in \mathrm{im}(T)$. Por la definición $\mathrm{im}(T)$, existe un $v \in V$ tal que $w = Tv$. Escribamos v como una combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_d, a_1, \ldots, a_r$:

$$v = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j.$$

Aplicamos T al vector v tomando en cuenta la linealidad de T y el hecho que $u_1, \ldots, u_d \in \ker(T)$:

$$w = T(v) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \underbrace{T(u_i)}_{\mathbf{0}_W} + \sum_{j=1}^{r} \mu_j T(a_j) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j b_j \in \ell(b_1, \ldots, b_r).$$

2. Mostremos que los vectores $b_1, \ldots, b_r$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j = \mathbf{0}_W.$$

Entonces

$$T\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j = \mathbf{0}_W.$$

Esto significa que el vector $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j$ pertenece a $\ker(T)$. Como $(u_1, \ldots, u_d)$ es una base de $\ker(T)$, existen $\beta_1, \ldots, \beta_d \in \mathbb{F}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j = \sum_{i=1}^{d} \beta_i u_i.$$

Pasamos todos los sumandos a un lado de la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{d} (-\beta_i) u_i + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j = \mathbf{0}_V.$$

Los vectores $u_1, \ldots, u_d, a_1, \ldots, a_r$ forman una base de V y por lo tanto son linealmente independientes. Esto implica que todos los coeficientes β_i y α_j son 0. En particular,

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0. \qquad \square$$

Otra demostración (tarea adicional)

En los siguientes ejercicios suponemos que V, W y T cumples con las condiciones del teorema: V y W son espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

4. Sean $a_1, \ldots, a_r \in V$ tales que $T(a_1), \ldots, T(a_r)$ son linealmente independientes. Demuestre que $a_1, \ldots, a_r$ son linealmente independientes.

5. Sea $a_1, \ldots, a_r, u_1, \ldots, u_d$ una base de V tal que $T(a_1), \ldots, T(a_r)$ es una base de $\operatorname{im}(T)$. Demuestre que $u_1, \ldots, u_d$ es una base de $\ker(T)$.

6. Demuestre que $\dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V)$ usando dos ejercicios anteriores.

7. Ejemplo. Están dadas las matrices asociadas a las transformaciones lineales R, S, T, U respecto a ciertas bases. Llenar la tabla escrita en continuación.

$$R_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$T_{\mathcal{G},\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U_{\mathcal{J},\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución. De la definición de la matriz asociada a una transformación lineal sigue que

$$\begin{aligned} \text{la dimensión del dominio} &= \text{el número de columnas de la matriz asociada,} \\ \text{la dimensión del contradominio} &= \text{el número de filas de la matriz asociada.} \end{aligned}$$

El rango de una transformación lineal es igual al rango de la matriz asociada, y la nulidad se puede calcular por la fórmula

$$\operatorname{nul}(T) = \dim(\text{dominio}) - \operatorname{r}(T).$$

Para determinar si T es inyectiva, suprayectiva, invertible, aplicamos las reglas:

$$\begin{array}{lcl} T \text{ es inyectiva} & \Longleftrightarrow & \operatorname{nul}(T) = 0; \\ T \text{ es suprayectiva} & \Longleftrightarrow & \operatorname{r}(T) = \dim(\text{contradominio}); \\ T \text{ es invertible} & \Longleftrightarrow & T \text{ es inyectiva y suprayectiva.} \end{array}$$

Calculamos los rangos de las matrices dadas:

- $\operatorname{r}(R_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) = 3$, porque la matriz es pseudoescalonada y tiene tres filas no nulas;
- $\operatorname{r}(S_{\mathcal{D},\mathcal{C}}) = 1$; la primera fila es no nula y la segunda es un múltiplo de la primera;
- $\operatorname{r}(T_{\mathcal{G},\mathcal{F}}) = 2$; la columna 1 es no nula y la columna 2 no es su múltiplo;
- $\operatorname{r}(U_{\mathcal{J},\mathcal{H}}) = 3$, porque la matriz es pseudoescalonada y tiene tres filas no nulas.

Llenamos la tabla:

	R	S	T	U
dim(dominio)	3	4	2	4
dim(contradominio)	3	2	3	3
rango = dim(imagen)	3	1	2	3
nulidad = dim(núcleo)	0	3	0	1
¿es inyectiva?	sí	no	sí	no
¿es suprayectiva?	sí	no	no	sí
¿es invertible?	sí	no	no	no

□